Л.Д. Е.М.
1963 7 1 572-292

目 录

第八章　电磁流体力学

§51. 磁場内的流体运动方程

如果液态(或气态)导电媒质是在磁場内，則当媒质作流体动力学运动时，就会在媒质内部感生出电場，并且产生出电流。但是作用在磁場内电流上的力，对流体的运动有重大的影响。另一方面，这些电流又使磁場本身改变。因此，就形成了磁現象和流体动力学現象相互作用的复杂图象，必須根据場方程和流体运动方程的联立方程組来研究它們。

我們采用(49.6)式作为运动的导电媒质内的場方程。电磁流体力学中所涉及的媒质的导磁率与1相差很小，而且这种差别对下面所研究的現象并不重要。因此，在这一章内，我們将假定 $\mu=$ $=1$。这样一来，我們得到方程組：

$$\operatorname{div}\mathbf{H}=0, \tag{51.1}$$

$$\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}=\operatorname{rot}[\mathbf{vH}]+\frac{c^2}{4\pi\sigma}\Delta\mathbf{H}. \tag{51.2}$$

利用这些方程时，我們同时假定了滿足某些条件，即是場的变化周期必須大于傳导电子的自由路程时間。于是电流和电場之間的关系由对恒定电流的相同的电导率 σ 决定(参閱§45)①。这时，

---

① 256頁上的底注还曾指出了 $\frac{\sigma}{\omega}\gg 1$ 这一条件；对不良导体，这一条件必須滿足，对于良导体，在滿足其他必要条件下这一条件也自动地滿足。在現在的情况下，比值 $\frac{V}{L}$ 为頻率，其中 L 与 V 是决定流体运动性质的长度和速度的特性参量。由此可見，$\frac{\sigma L}{V}\gg 1$ 的条件当然滿足。

我們假定，σ 在整个媒质內不变。同时特別假定，电导率和磁場无关。为此，电子的自由路程长度必須小于磁場內电子軌道的曲率半徑。換句話說，自由路程时間必須小于电子的拉莫頻率$\frac{eH}{mc}$。在强磁場內和媒质很稀薄时，这一条件可能被破坏。

流体动力学方程首先包括連續性方程：

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}\rho\mathbf{v}=0 \tag{51.3}$$

(ρ为流体密度)和納維-斯托克斯方程：

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}+(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}=-\frac{1}{\rho}\nabla p+\frac{\eta}{\rho}\Delta\mathbf{v}+$$
$$+\frac{1}{\rho}\left(\zeta+\frac{\eta}{3}\right)\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{v}+\frac{\mathbf{f}}{\rho},$$

式中 η 和 ζ 为流体的两个粘滞系数，而 $\mathbf{f}$ 为外加力(在現在的情况下是电磁力)的体密度。按照(34.4)式，我們得到

$$\mathbf{f}=\frac{1}{c}[\mathbf{jH}]=\frac{1}{4\pi}[\operatorname{rot}\mathbf{H}\cdot\mathbf{H}].$$

由此可見，流体的运动方程为

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}+(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}=-\frac{\nabla p}{\rho}-\frac{1}{4\pi\rho}[\mathbf{H}\operatorname{rot}\mathbf{H}]+$$
$$+\frac{\eta}{\rho}\Delta\mathbf{v}+\frac{1}{\rho}\left(\zeta+\frac{\eta}{3}\right)\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{v}. \tag{51.4}$$

除了这些方程外，还必須加上把流体的压强、密度和溫度联系起来的状态方程：

$$p=p(\rho,T), \tag{51.5}$$

和所謂热傳递方程。在通常的流体动力学中，后者的形式为①

$$\rho T\left(\frac{\partial s}{\partial t}+\mathbf{v}\nabla s\right)=\sigma'_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\operatorname{div}(\kappa\nabla T).$$

① 参閱"連續介质力学"第二版 § 49。

式中 s 为流体单位质量的熵，等式左侧的表达式代表运动流体元在 1 秒內所放出的热量(属于单位体积)。等式右侧的表达式为相同体积內 1 秒內所耗散的能量。其中第一项与粘度有关；σ'_{ik} 为粘度应力張量:

$$\sigma'_{ik}=\eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\frac{\partial v_k}{\partial x_i}-\frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\right)+\zeta\delta_{ik}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}.$$

第二項給出由热傳导所引起的耗散(κ为热导率)。在导电流体內，还应該添上一項焦耳热。化到单位体积，焦耳热等于

$$\frac{j^2}{\sigma}=\frac{c^2}{16\pi^2\sigma}(\text{rot}\,\mathbf{H})^2.$$

因此电磁流体力学中的热傳遞方程为

$$\rho T\left(\frac{\partial s}{\partial t}+\mathbf{v}\nabla s\right)=\sigma'_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\text{div}(\kappa\nabla T)+$$
$$+\frac{c^2}{16\pi^2\sigma}(\text{rot}\,\mathbf{H})^2. \tag{51.6}$$

方程(51.1)—(51.6)組成了电磁流体力学的完全方程組(在本节开头所指出的假定下)。

方程(51.4)和(51.6)也可以分别写成表示动量和能量守恒定律的形式。即通常流体动力学中的納維-斯托克斯方程可以写成(这里也利用了連續性方程)①

$$\frac{\partial \rho v_i}{\partial t}=-\frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k}, \tag{51.7}$$

式中 Π_{ik} 为动量流密度張量，等于

$$\Pi_{ik}=\rho v_i v_k+p\delta_{ik}-\sigma'_{ik}.$$

(51.4)也可以化成同样的形式，只是在 Π_{ik} 內出現一附加項。于是我們有

$$[\mathbf{H}\,\text{rot}\,\mathbf{H}]=\frac{1}{2}\text{grad}\,H^2-(\mathbf{H}\nabla)\mathbf{H}.$$

① 参閱"連續介质力学"第二版，§15。

因此得到 Π_{ik} 的式子为

$$\Pi_{ik}=\rho v_i v_k+p\delta_{ik}-\sigma'_{ik}-\frac{1}{4\pi}\left[H_iH_k-\frac{1}{2}H^2\delta_{ik}\right]. \qquad (51.8)$$

Π_{ik} 內的附加項为磁場的麦克斯韦应力張量，这正是应当的。

热傳递方程可以变換成（利用其他的流体动力学方程）能量守恒方程。在通常的流体动力学中，

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho v^2}{2}+\rho\varepsilon\right)=-\operatorname{div}\mathbf{q},$$

式中 $\mathbf{q}$ 为能量流密度，等于

$$\mathbf{q}=\rho\mathbf{v}\left(\frac{v^2}{2}+w\right)-(\mathbf{v}\sigma')-\kappa\nabla T,$$

而 ε 和 $w=\varepsilon+\frac{p}{\rho}$，分别为 1 克流体的內能和热函数。如果导电媒质內存在磁場，則在能量密度內应包括磁能：$\frac{H^2}{8\pi}$，而在能流密度內应包括坡印廷矢量：$\frac{c}{4\pi}[\mathbf{EH}]$。在后一式子內，用 $\mathbf{H}$ 表示 $\mathbf{E}$，我們得到

$$\mathbf{q}=\rho\mathbf{v}\left(\frac{v^2}{2}+w\right)+\frac{1}{4\pi}[\mathbf{H}[\mathbf{vH}]]-$$
$$-\frac{c^2}{16\pi^2\sigma}[\mathbf{H}\operatorname{rot}\mathbf{H}]-(\mathbf{v}\sigma')-\kappa\nabla T, \qquad (51.9)$$

并且得到能量守恒方程为

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho v^2}{2}+\rho\varepsilon+\frac{H^2}{8\pi}\right)=-\operatorname{div}\mathbf{q}. \qquad (51.10)$$

利用直接的計算，不难驗证(51.6)和(51.10)式是等效的。

如果假定运动流体是不可压縮的，則这些方程还可以进一步簡化。于是，連續性方程(51.3)变为 $\operatorname{div}\mathbf{v}=0$，而在(51.4)式內，最后一項等于零。为了后面引用方便，我們再一次写出相应的方程組（在(51.2)和(51.4)式內，利用熟知的矢量分析公式，已方便地

分别变换 rot[**vH**]和[**H** rot **H**]项]:

$$\operatorname{div}\mathbf{H}=0,\quad \operatorname{div}\mathbf{v}=0, \tag{51.11}$$

$$\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}+(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{H}=(\mathbf{H}\nabla)\mathbf{v}+\frac{c^2}{4\pi\sigma}\Delta\mathbf{H}, \tag{51.12}$$

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}+(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}=-\frac{1}{\rho}\nabla\left(p+\frac{H^2}{8\pi}\right)+$$

$$+\frac{1}{4\pi\rho}(\mathbf{H}\nabla)\mathbf{H}+\nu\Delta\mathbf{v} \tag{51.13}$$

$\nu=\dfrac{\eta}{\rho}$为粘滞率。(51.6) 式对求解非压縮流体的运动問題并不需要，除非我們对流体内的特殊温度分布和它对运动的影响感到兴趣。

我們回到普遍方程 (51.2)。在电导率相当大的极限情况下，它的形式变为

$$\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}=\operatorname{rot}[\mathbf{v}\mathbf{H}], \tag{51.14}$$

对这个方程有一个很重要的直观解釋。我們把等式右側的 rot 展开，并考虑到 div **H**=0，于是

$$\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}=(\mathbf{H}\nabla)\mathbf{v}-(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{H}-\mathbf{H}\operatorname{div}\mathbf{v}.$$

从連續性方程(51.3)内代入

$$\operatorname{div}\mathbf{v}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial t}-\frac{v}{\rho}\nabla\rho,$$

在經过簡单的并项后，我們得到

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t}+(\mathbf{v}\nabla)\right\}\frac{\mathbf{H}}{\rho}=\left(\frac{\mathbf{H}}{\rho}\nabla\right)\mathbf{v}.$$

等式左側的表达式代表“实在”导数，它給出流体粒子运动时量$\dfrac{\mathbf{H}}{\rho}$的变化；把这导数表示为$\dfrac{d}{dt}$，我們得到

$$\frac{d}{dt}\frac{\mathbf{H}}{\rho}=\left(\frac{\mathbf{H}}{\rho}\nabla\right)\mathbf{v}. \tag{51.15}$$

另一方面，我們来研究某一“流綫”，也即是随流体粒子一起移动的綫。設$\delta\mathbf{l}$为这綫的长度元；我們来求出它如何随时間而变化。如果$\mathbf{v}$为在綫元$\delta\mathbf{l}$一端上的流体速度，則在綫元另一端上的流体速度为$\mathbf{v}+(\delta\mathbf{l}\nabla)\mathbf{v}$。因此，在时間$dt$内，綫元$\delta\mathbf{l}$的改变为$dt(\delta\mathbf{l}\nabla)\mathbf{v}$，也即是

$$\frac{d}{dt}\delta\mathbf{l}=(\delta\mathbf{l}\nabla)\mathbf{v}.$$

我們看到，矢量$\delta\mathbf{l}$和$\frac{\mathbf{H}}{\rho}$随时間的变化由同一方程得出。由此得到，如果在开始时刻这两个矢量的方向相同，則它們在以后也将保持平行，而且它們的长度互成比例地改变。換句話說，如果两无限邻近的流体粒子在同一力綫上，則以后它們也总是在这一力綫上，而$\frac{\mathbf{H}}{\rho}$与粒子間的距离成比例地改变。

因此当我們从无限邻近的两点过渡到彼此分开一有限距离的两点时，我們得到結論：每一力綫和該力綫上的流体粒子一起移动，反过来可以說(在$\sigma\to\infty$的极限情况下)，磁力綫仿佛“冻結在”和它一起移动的流体上。在每一点处，量$\frac{\mathbf{H}}{\rho}$与相应“流綫”的伸长成正比地改变。如果运动流体可以假定是不可压縮的，則$\rho=$常数，于是磁場强度H本身也与磁力綫的伸长成正比地改变。

这些結果还有另一个直观的方面，即当某一閉合的“流体”綫路移动时，这流体綫路并不与磁力綫相交，也即是穿过閉合綫路的磁力綫“数目”保持不变。这表明(参閱§49)，穿过閉合流体綫路所圍成的面积的磁通量并不随时間而改变。

在什么条件下实际上可以忽略流体內的耗散过程，这一問題还沒有普遍的解答，因为这些条件与运动的特性有密切的关系，例

如对定态和非定态运动，就完全不同。我們在这里不对这一問題作普遍研究。

例 題

設不可压縮的粘性导电流体在两平行的固体平面間的空間內作稳定运动，試求流体內的速度分布；假設在垂直于平面的方向上加上外均匀磁場 H_0 (J. 哈特曼, 1937)。

解. 自然地假定流体的速度处处有同一方向（我們选擇这方向为 x 軸方向）；流体速度在垂直于平面的方向上只与 z 坐标有关。这也适用于由流体运动所产生的横向磁場 H_x。压强 p 也依賴于 x，因为在运动方向必須有一恒定的压强陡度，以維持稳定的流动。于是方程 $\operatorname{div}\mathbf{V}=0$ 自动地滿足，而从 $\operatorname{div}\mathbf{H}=0$ 得出，$H_z=$ 常数 $=H_0$，(51.13)式的 z 分量給出

$$p+\frac{H_x^2}{8\pi}=P(x), \tag{1}$$

式中 $P(x)$ 只是 x 的函数。x 軸上的压强陡度 $-\frac{\partial p}{\partial x}=-\frac{dP}{dx}$ 为一恒量。

其次，(51.12)和(51.13)式的 x 分量給出

$$H_0\frac{dv}{dz}+\frac{c^2}{4\pi\sigma}\frac{d^2H_x}{dz^2}=0, \tag{2}$$

$$\eta\frac{d^2v}{dz^2}+\frac{H_0}{4\pi}\frac{dH_x}{dz}=\text{常数}\equiv\frac{dP}{dx}. \tag{3}$$

粘性流体速度的边界条件为：当 $z=\pm a$ 时，$v=0$，这里的 $2a$ 为两平行的固体平面間的距离，而平面 $z=0$ 位于两固体平面的中央。于是 $z=\pm a$ 时 $H_x=0$ 的条件对磁場来說必須滿足，因为在流体之外，外磁場 $\mathbf{H}_0$ 不变，而 $\mathbf{H}$ 与边界相切的分量为連續的。(2)、(3)两式滿足这些条件的解为

$$v=v_0\frac{\operatorname{ch}(a/\Delta)-\operatorname{ch}(z/\Delta)}{\operatorname{ch}(a/\Delta)-1},$$

$$H_x=-v_0\frac{4\pi}{c}\sqrt{\sigma\eta}\,\frac{(z/a)\operatorname{sh}(a/\Delta)-\operatorname{sh}(z/\Delta)}{\operatorname{ch}(a/\Delta)-1}, \tag{4}$$

式中 $\Delta=\frac{c}{H_0}\sqrt{\frac{\eta}{\sigma}}$。常数 v_0 为中央平面 $z=0$ 內的流体速度。将(4)代入(3)內，我們即得到流体速度与压强陡度的关系式。流体的平均速度（沿截面）为

$$\bar{v}=\frac{1}{2a}\int_{-a}^{a}v\,dz=-\frac{dP}{dx}\,\frac{a\Delta}{\eta}\left(\operatorname{cth}\frac{a}{\Delta}-\frac{\Delta}{a}\right).$$

磁場对流体流动影响的程度的判据为比值$\frac{a}{\Delta}=\frac{aH_0}{c}\sqrt{\frac{\sigma}{\eta}}$。当$a/\Delta\ll 1$时，我們得到

$$v=v_0\left(1-\frac{z^2}{a^2}\right),\quad \bar{v}=-\frac{dP}{dx}\frac{a^2}{3\eta},$$

这和通常的流体动力学的結果一致。如果$a/\Delta\gg 1$，則

$$v=v_0\left(1-e^{-(a-|z|)/\Delta}\right),\quad \bar{v}=-\frac{dP}{dx}\frac{ac}{H_0\sqrt{\sigma\eta}}.$$

磁場的增大在大部分的截面內使速度断面更变为平面，从而使运动的平均速度減小(保持压强陡度不变)。

§ 52. 电磁流体力学波

我們現在来研究小扰动在均匀外磁場$\mathbf{H}_0$內的均匀导电媒质內的傳播。这时我們假定媒质的粘度、热导率和电阻$(1/\sigma)$都很小，以致由它們所引起的能量耗散对扰动傳播的影响，在第一近似內可以忽略不計①。于是扰动将以非衰減波的形式而傳播②。

略去全部的耗散項后，我們可以将基本方程組(51.1)—(51.4)改写为

$$\operatorname{div}\mathbf{H}=0, \tag{52.1}$$

$$\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}=\operatorname{rot}[\mathbf{v}\mathbf{H}], \tag{52.2}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}(\rho\mathbf{v})=0, \tag{52.3}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}=-\frac{\nabla p}{\rho}+\frac{1}{4\pi\rho}[\operatorname{rot}\mathbf{H}\cdot\mathbf{H}]. \tag{52.4}$$

(51.6)式可以化成熵守恒方程(絕热运动的条件)。如果未受扰动

---

① 注意到，令$\frac{1}{\sigma}=0$以后，我們就扩大了应用所得到的方程的頻率范圍：于是保证σ不存在色散和它不依賴于磁場的条件就成为不是必要的。

② 容許这种略去的条件是波的衰減系数很小(在本节的例題算出)。

的媒质是均匀的，则由于这一方程，在受扰动的媒质內，将是 $s=$ 常数，也即是运动是等熵的。

我們写出

$$\mathbf{H}=\mathbf{H}_0+\mathbf{h},\quad \rho=\rho_0+\rho',\quad p=p_0+p', \tag{52.5}$$

式中下角标 0 表示这些量的恒定的平衡值，而 $\mathbf{h}$、ρ'、p 表示它們在波內的小变化。在平衡态下变为零的速度$\mathbf{v}$，也是相同数量級的小量。由于运动是等熵的，因而压强与密度的变化的关系式为

$$p'=\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s \rho'.$$

但$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s$为媒质內普通声速的平方。我們用 u_0 表示这一速度，于是有 $p'=u_0^2\rho$。在方程(52.1)—(52.4)內略去一次以上的小量，我們得到下列的綫性方程組:

$$\begin{gathered}\operatorname{div}\mathbf{h}=0,\\ \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t}=\operatorname{rot}[\mathbf{v}\mathbf{H}],\\ \frac{\partial \rho'}{\partial t}+\rho\operatorname{div}\mathbf{v}=0,\\ \frac{\partial v}{\partial t}=-\frac{u_0^2}{\rho}\nabla\rho'-\frac{1}{4\pi\rho}[\mathbf{H}\operatorname{rot}\mathbf{h}].\end{gathered} \tag{52.6}$$

这里和下面，为簡化符号起見，我們略去了平衡值上的下角标 0。对于时間周期性的扰动，其中第一式为从第二式得到的結果，因而可以不必单独討論它。

我們来求出这些方程的形式为 $e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)}$的解，也即是求出描写波矢量为$\mathbf{k}$ 和频率为 ω 的平面波傳播的解。对这种平面波而言，方程組(52.6)变为代数方程組:

$$-\omega\mathbf{h}=[\mathbf{k}[\mathbf{v}\mathbf{H}]],$$

$$\omega\rho'=\rho\mathbf{k}\mathbf{v},$$

$$-\omega\mathbf{v}+\frac{u_0^2}{\rho}\rho'\mathbf{k}=-\frac{1}{4\pi\rho}[\mathbf{H}[\mathbf{kh}]].$$

其中第一式首先表明，矢量 $\mathbf{h}$ 垂直于波矢量方向，下面我們将选擇这方向为 x 方向，并选擇通过 $\mathbf{k}$ 和 $\mathbf{H}$ 的平面为 xy 平面。此外，引进波的“相速度”为

$$u=\frac{\omega}{k},$$

利用第二式消去 ρ'，并把其余的量写成分量，于是我們得到下列方程組：

$$uh_z=-v_zH_x,\quad uv_z=-\frac{H_x}{4\pi\rho}h_z \tag{52.7}$$

$$uh_y=v_xH_y-v_yH_x,\quad uv_y=-\frac{H_x}{4\pi\rho}h_y,$$

$$v_x\left(u-\frac{u_0^2}{u}\right)=\frac{H_y}{4\pi\rho}h_y. \tag{52.8}$$

我們把这些方程分成两組，第一組只包含变数 h_z, v_z，而第二組只包含 h_y，v_x，v_y。由此得到，这两組变量的扰动独立地傳播。密度扰动（以及压强扰动）与扰动 h_y, v_x, v_y 一起傳播，它和 v_x 的关系式为

$$\rho'=\frac{\rho}{u}v_x. \tag{52.9}$$

由(52.7)两个方程的联立条件得出

$$u_1=\frac{H_x}{\sqrt{4\pi\rho}}. \tag{52.10}$$

在这些波內，垂直于波傳播方向和恒定磁場 $\mathbf{H}$ 方向的磁場分量 h_z 发生变化。而且除了 h_z 外，速度 v_z 也发生变化，它和 h_z 的关系为

$$v_z=-\frac{h_z}{\sqrt{4\pi\rho}}. \tag{52.11}$$

由(52.10)式所給出的 ω 和 k 的关系（或者称为色散定律），完全依賴于波矢量方向：

$$\omega=\frac{1}{\sqrt{4\pi\rho}}\mathbf{Hk}.$$

大家知道,波傳播的物理速度称为“群速度”,由导数$\frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{k}}$給出。在现在的情况下,这个量等于

$$\frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{k}}=\frac{\mathbf{H}}{\sqrt{4\pi\rho}},$$

并且与$\mathbf{k}$的方向无关。如果把波傳播方向理解为它的群速度方向,則与$\mathbf{H}$的方向一致。

我們現在来研究(52.8)式所描写的波。組成这些方程的行列式,并令它等于零,我們得到

$$(u^2-u_0^2)\left(u^2-\frac{H_x^2}{4\pi\rho}\right)=\frac{u^2H_y^2}{4\pi\rho}.$$

这个u的四次方程的根为①

$$u_{2,3}=\frac{1}{2}\left\{\sqrt{u_0^2+\frac{H^2}{4\pi\rho}+\frac{H_xu_0}{\sqrt{\pi\rho}}}\pm\sqrt{u_0^2+\frac{H^2}{4\pi\rho}-\frac{H_xu_0}{\sqrt{\pi\rho}}}\right\}. \quad (52.12)$$

由此可見,我們再得到两种波。在这些波內,h_x, v_x, v_y和密度ρ'发生变化。这些波的矢量$\mathbf{h}$, $\mathbf{v}$在矢量$\mathbf{H}$, $\mathbf{k}$的平面內。

在$H^2\ll 4\pi\rho u_0^2$的极限情况下,我們有$u_2\cong u_0$,而从(52.8)式得到,$v_y\ll v_x$。換句話說,这种类型的波在极限情况下变成傳播速度为u_0的普通声波。波內的弱横向場与v_x的关系为

$$h_y\cong v_x\frac{H_y}{u_0}.$$

在与上述相同的极限情况下,在第一近似內u_3与u_1相等,而且$v_x\cong 0$, $v_y\cong\frac{-h_y}{\sqrt{4\pi\rho}}$,这和在第一种类型的波內一样,只是矢量$\mathbf{v}$和

① 四次方程$x^4+px^2+q=0$的根,可以写为

$$x=\pm\frac{1}{2}\left\{\sqrt{-p+2\sqrt{q}}\pm\sqrt{-p-2\sqrt{q}}\right\}.$$

h 在 **kH** 平面内，而不是和它垂直。

我們还看到，在不可压縮流体內(形式上相应于极限情况 $u_0\to\infty$)，只剩下具有两个独立偏振方向的一种波。这种波的色散定律由(52.10)式給出，而矢量 **v** 和 **h** 垂直于波矢量，并且其关系式为

$$\mathbf{v}=\frac{\mathbf{h}}{\sqrt{4\pi\rho}}. \tag{52.13}$$

这种波由 X. 阿耳芬最先进行了研究(1942)①。

当存在纵向磁場时，流体的横向移动以波的形式傳播，这一事实有一个簡单的直观解釋。在 § 51 末我們已看到，磁力綫的行为(在 $\sigma\to\infty$ 的流体內)和"流綫"相同。因此，流体粒子的横向移动引起磁力綫的弯曲，并使它伸长，而且在某些地方密聚起来。但是作用在磁場內的力(用麦克斯韦应力張量表示)的特征則仿佛是使磁力綫趋向于縮短，同时互相排斥②。因此当磁力綫弯曲时引起"准彈性力"，它趋向于重新使磁力綫伸直，这样一来就引起振动現象。

有趣的是，在不可压縮流体內，(52.10)和(52.13)式所描写的平面电磁流体力学波，实际上是对任何横向磁場 **h**(不一定很小)都适合的方程的精确解(但是，这不适用于傳播方向不同的几个平面波的叠加)。事实上，我們来研究精确方程(52.1)—(52.4)。在不可压縮流体內，(52.3)式变成 $\mathrm{div}\,\mathbf{v}=0$。如果我們来求出全部量只与一个坐标 x 和时間 t 有关的解，则从这方程我們得到 $v_x=$ 常数；变换到沿 x 軸作匀速运动的另一坐标系，我們常常可以使 $v_x=0$。从方程 $\mathrm{div}\mathbf{H}=0$ 得到 $H_x=$ 常数。我們用 **h** 表示 **H** 的横向

---

① 这些波有时称为电磁流体力学波(狭义的)。在磁場不很小的普遍情况下，这些波不可能分为电磁流体力学波和普通声波。

② 实际上，設力綫与 z 軸相合，于是纵向应力 Π_{zz}(51.8)包含負的项 $-\frac{H^2}{8\pi}$，而横向应力 Π_{xx}，Π_{yy} 包含正项：$\frac{H^2}{8\pi}$.

分量，于是，从(52.2)和(52.4)式(当 $v_x=0$)得到

$$\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t}=H_x\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x},\quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}=\frac{H_x}{4\pi\rho}\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial x},$$

也即是精确方程自动地变为綫性方程，它描写相速度为(52.10)的平面波，而且 $\mathbf{v}$ 和 $\mathbf{h}$ 的关系式为(52.13)式。由(52.4)式的 x 分量給出

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{1}{4\pi\rho}\mathbf{h}\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial x}=0,$$

由此得

$$p+\frac{h^2}{8\pi}=\text{常数}, \tag{52.14}$$

由这个式子可以求出波内压强变化的过程。

我們再回到(52.8)和(52.12)式，并且研究相反的极限情况：$H^2\gg 4\pi\rho u_0^2$。于是在第一近似內，我們得到 u_2 为

$$u_2=\frac{H}{\sqrt{4\pi\rho}}.$$

因为这个式子完全和 $\mathbf{k}$ 无关，因而群速度的数值和 u_2 相等，其方向指向 $\mathbf{k}$ 方向。这种波内的矢量 $\mathbf{v}$ 与 $\mathbf{H}$ 垂直(图 28)，其絕对值与 $h=h_y$ 的关系为

$$v=\frac{h}{\sqrt{4\pi\rho}}.$$

在这种情况下，得到 u_3 为

$$u_3=u_0\frac{H_x}{H}.$$

这时群速度为

$$\frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}}=u_0\frac{\mathbf{H}}{H}.$$

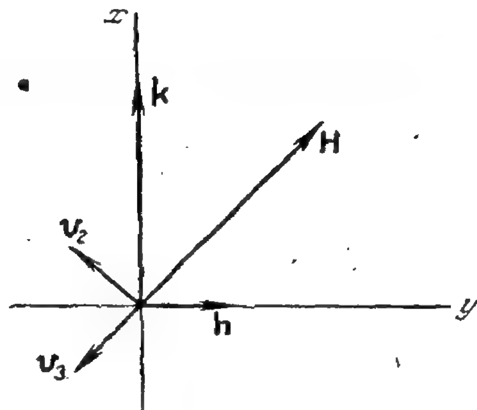


图 28

这种波内的矢量 $\mathbf{v}$ 与 $\mathbf{H}$ 反平行，而其絕对值与 h 的关系为

$$v=h\frac{H^2}{4\pi\rho u_0 H_y}.$$

当H^2与ρu_0^2为任意关系时，则u_2和u_3都依赖于波矢量的方向。当**k**与**H**間的夹角增加时，u_2单調地增加，而u_3則单調地減小。容易看到，下列不等式总是成立的：

$$u_3 \leqslant u_1 \leqslant u_2, \qquad u_2 \geqslant u_0, \qquad u_3 \leqslant u_0. \tag{52.15}$$

如果$\mathbf{k} \parallel \mathbf{H}(H_y=0, H_x=H)$，則$u_2$和$u_3$分别等于$u_0$和$u_1=\frac{H}{\sqrt{4\pi\rho}}$的最大值和最小值。如果$\mathbf{k} \perp \mathbf{H}(H_x=0, H_y=H)$，则我們有

$$u_2=\sqrt{u_0^2+\frac{H^2}{4\pi\rho}}, \tag{52.16}$$

而u_1和u_3变成零，也即是只剩下一种类型的波。

在后一种情况下，我們可以求出平面波的电磁流体力学方程的精确解，并不必假定它的振幅很小(C. A. 卡普兰和K. П. 斯塔紐科維奇，1954)。当$H_x=0, H_y=H$时，(52.1)式恒被滿足，而由方程(52.2)—(52.4)得出

$$\frac{\partial H}{\partial t}+\frac{\partial(v_x H)}{\partial x}=0, \tag{52.17}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial(v_x \rho)}{\partial x}=0, \tag{52.18}$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{1}{8\pi\rho}\frac{\partial H^2}{\partial x}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}. \tag{52.19}$$

容易证明，从头两个方程得出，比值$\frac{H}{\rho}=b$滿足方程：

$$\frac{\partial b}{\partial t}+v_x\frac{\partial b}{\partial x}=0,$$

或$\frac{db}{dt}=0$，式中的全导数表示流体粒子移动时量b的变化。由此得出，如果在起始时刻流体是均匀的，于是其中的b为常数，因而在以后任何时刻，我們有①

---

① 这和$\frac{H}{\rho}$与流体力綫的关系的普遍結果(§51)符合一致，如果考虑到在現在的情况下，后者的长度不随时間而改变。

$$\frac{H}{\rho}=b=\text{常数。} \tag{52.20}$$

把 $H=\rho b$ 代入第三个方程，我們得到

$$\frac{\partial v_x}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}\left(p+\frac{b^2}{8\pi}\rho^2\right). \tag{52.21}$$

由此可見，磁場已从方程內消去，問題变成求(52.18)式和(52.21)式的解。但是，这些方程和通常流体动力学中的一維运动方程不同的地方，只是气体的状态方程有变化，代替实在的方程 $p=p(\rho)$（保持熵 s 不变），必須利用方程：

$$p^*(\rho)=p(\rho)+\frac{b^2}{8\pi}\rho^2.$$

由于这一情况，可以把通常流体动力学的全部結果移用到我們所研究的电磁流体力学的运动情况。特别是可以应用一維行波精确解的公式（黎曼解）①，而且其中的声速为

$$u^*=\sqrt{\left(\frac{\partial p^*}{\partial\rho}\right)_s}=\sqrt{u_0^2+\frac{b^2}{4\pi}\rho}=\sqrt{u_0^2+\frac{H^2}{4\pi\rho}},$$

这和(52.16)式符合一致。

例　　题

試求不可压縮流体內电磁流体力学波的吸收系数（假定它很小）。

解. 波的吸收系数定义为

$$\gamma=\frac{\bar{Q}}{2\bar{q}},$$

式中 $\bar{Q}$ 为1秒內单位体积內所耗散的平均能量（对时間平均），而 $\bar{q}$ 为波內的平均能流密度。在傳播时波的振幅与 $e^{-\gamma x}$ 成正比地衰减，Q 由(51.6)式的右側給出；在不可压縮流体內，对在 x 軸方向傳播的波（与此相应，$v_x=0$），我們有

$$Q=\eta\left(\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial x}\right)^2+\frac{c^2}{16\pi^2\sigma}\left(\frac{\partial\mathbf{h}}{\partial x}\right)^2.$$

① 参閱"連續介質力学"第二版 § 94。

在(51.9)的能流密度內，我們略去小的耗散項，于是有

$$q_x = -\frac{1}{4\pi}H_x\mathbf{hv}.$$

利用(52.10)和(52.13)式，結果得到

$$\gamma = \frac{\omega^3}{2u_1^3}\left(\frac{\eta}{\rho}+\frac{c^2}{4\pi\sigma}\right).$$

§ 53. 切向間断和旋轉間断

“理想”的电磁流体力学媒质（沒有粘性、导热性和电阻的媒质）的运动方程，和在通常的流体动力学中一样，容許間断流动。

为了闡明間断面上必須滿足的条件，我們来研究这面上的某一面元，并且采用与面元一起运动的坐标系①。

首先在間断面上，物质流必須为連續的，即从表面一側进入的气体量必須等于表面另一側出来的气体量。这表明 $\rho_1 v_{1n} = \rho_2 v_{2n}$，式中下角标 *1* 和 *2* 指間断面的两側，而下角标 n 表示与間断面垂直的矢量分量。下面我們用花括号表示某一数量在間断面两側的数值之差。于是

$$\{\rho v_n\} = 0.$$

其次，能量流必須为連續的，利用(51. 9)式（并略去了其中耗散項），我們得到

$$\{q_n\} = \left\{\rho v_n\left(\frac{v^2}{2}+w\right)+\frac{1}{4\pi}[v_n H^2 - H_n(\mathbf{vH})]\right\} = 0.$$

动量流也必須为連續的。这条件表明 $\{\Pi_{ik}n_k\}=0$，式中 Π_{ik} 为动量流密度張量，而 $\mathbf{n}$ 为表面法綫方向的单位矢量。利用(51. 8)式，我們由此得到

$$\left\{p+\rho v_n^2+\frac{1}{8\pi}(\mathbf{H}_t^2 - H_n^2)\right\} = 0,$$

① 由于这一条件，只在垂直于表面的方向上，坐标系的速度才是固定的，而与表面相切的速度，則可以添上一个任意的恒定矢量。

$$\left\{ \rho v_n \mathbf{v}_t - \frac{1}{4\pi} H_n \mathbf{H}_t \right\} = 0,$$

式中下角标 t 表示与表面相切的矢量分量。

最后，磁場的法向分量和电場的切向分量也必須为連續的。当媒质的电导率为无限大时，感生的电場为

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}[\mathbf{vH}].$$

因而由条件$[\mathbf{E}_t]=0$ 給出

$$\{H_n \mathbf{v}_t - \mathbf{H}_t v_n\} = 0.$$

下面不用气体密度，而采用体积度 $V=\frac{1}{\rho}$ 更为方便。通过間断面的质量流密度我們用 j 表示：

$$j = \rho v_n = \frac{v_n}{V}.$$

考虑到 j 和 H_n 的連續性，其余的边界条件可以写成下列形式：

$$j\left\{ w + \frac{j^2V^2}{2} + \frac{v_t^2}{2} + \frac{V\mathbf{H}_t^2}{4\pi} \right\} = \frac{H_n}{4\pi}\{\mathbf{H}_t \mathbf{v}_t\}, \tag{53.1}$$

$$\{p\} + j^2\{V\} + \frac{1}{8\pi}\{\mathbf{H}_t^2\} = 0, \tag{53.2}$$

$$j\{\mathbf{v}_t\} = \frac{H_n}{4\pi}\{\mathbf{H}_t\}, \tag{53.3}$$

$$H_n\{\mathbf{v}_t\} = j\{V\mathbf{H}_t\}. \tag{53.4}$$

这也就是描写电磁流体力学中的間断的基本方程組。

大家知道，在通常的流体动力学中，有两种完全不同类型的間断——冲击波和切向間断[①]。这两种間断类型的发生，在数学上說，是由于某些边界条件的方程可以写成两个因子的乘积等于零的形式；分别令每一因子等于零，我們得到两个完全独立的解。

① 參閱"連續介质力学"第二版 § 81。

在电磁流体力学內，方程(53.1)—(53.4)沒有这样的形式，因而可能认为只存在一种类型的間断，它包括了各种可能的特殊情况。但是，实际上也发現存在不同类型的間断，它們並不是某一种間断的特殊情况(F. De Hoffman 和 E. Teller, 1950)

首先，我們研究 $j=0$ 的間断，这表明，$v_{1n}=v_{2n}=0$，也即是流体平行于間断而运动。如果这时 $H_n\neq 0$，則从方程(53.1)—(53.4)看出，速度、压强和磁場必須为連續的，而密度(以及熵、溫度等等)則可以有任意的跃变。这种間断可以称为"接触間断"，它代表密度和溫度不相同的两靜止媒质間的分界面。

如果 $j=0$ 时，H_n 也等于零，則在(53.1)—(53.4)的四个方程中，三个方程立即恒被滿足；由此看出，这是一种特殊情况 这样一来，我們得到一类間断，和在通常的流体动力学一样，可以称它为切向間断。在这种間断面上，速度和磁場与間断面相切，而且数值和方向都有任意跃变:

$$j=0,\quad H_n=0,\quad \{\mathbf{v}_t\}\neq 0,\quad \{\mathbf{H}_t\}\neq 0. \tag{53.5}$$

密度的跃变也可以取任意数值，而压强跃变与 $\mathbf{H}_t$ 的跃变由(53.2)式联系起来:

$$\{V\}\neq 0,\qquad \left\{p+\frac{H_t^2}{8\pi}\right\}=0. \tag{53.6}$$

其他热力学量(熵、溫度等等)的跃变，可以利用气体状态方程就从 V 和 p 的跃变求出。

另一种間断类型是气体密度沒有跃变的間断。由于通量 $j=\frac{v_n}{V}$ 是連續的，因而从密度不存在跃变立即得出，速度的法向分量也将是連續的:

$$j\neq 0,\quad \{V\}=0,\quad \{v_n\}=0. \tag{53.7}$$

其次，把(53.4)式右側的 V 移到花括号外，再以(53.3)式除(53.4)式，我們得到

$$j=\frac{H_n}{\sqrt{4\pi V}}. \tag{53.8}$$

然后，由(53.3)或(53.4)式得出

$$\{\mathbf{v}_t\}=\sqrt{\frac{V}{4\pi}}\{\mathbf{H}_t\} \tag{53.9}$$

在(53.1)式內，我們令 $w=\varepsilon+pV$；考慮到 V 的連續性，按照(53.8)式代替 H_n，并将各項并項后，可以将它改写为

$$j\{\varepsilon\}+jV\left\{p+\frac{1}{8\pi}\mathbf{H}_t^2\right\}+\frac{j}{2}\left\{\left(\mathbf{v}_t-\sqrt{\frac{V}{4\pi}}\mathbf{H}_t^2\right)^2\right\}=0.$$

由于等式(53.2)，其中第二項变成零，而由于(53.9)式，第三項也变成零，于是只剩下 $\{\varepsilon\}=0$，也即是，除了密度为連續外，內能也是連續的。但是任何其他的热力学量，只要 ε 和 V 是已知的，就可单值地定出。因此，其他的热力学量（其中包括压强）也是連續的。于是从(53.2)式得出，平方 H_t^2 也是連續的，也即是矢量 $\mathbf{H}_t$ 的絕对值为

$$\{p\}=0, \quad \{H_t\}=0. \tag{53.10}$$

H_t与H_n同时为連續的表明，矢量 $\mathbf{H}$ 的总絕对值以及 $\mathbf{H}$ 与法綫間的夹角也都为連續的。

(53.7)—(53.10) 式确定了我們所研究的各种間断的全部性质。在这些間断面上，气体的热力学量为連續的，而磁場則繞法綫方向轉动，但其絕对值保持不变。除了矢量 $\mathbf{H}_t$ 外，速度的切向分量［按照 (53.9)式］也发生跃变，而其法向分量 $v_n=jV$ 則为連續的，并且等于

$$v_n=H_n\sqrt{\frac{V}{4\pi}}=\frac{H_n}{\sqrt{4\pi\rho}}. \tag{53.11}$$

我們称这种間断为旋轉間断。

有趣的是我們注意到，由适当选擇坐标系，常常可以使得在旋轉間断面的两侧，气体的速度与場平行。为此只要变换到新坐标系

就行了（参閱 308 頁上的底注），这新坐标系相对于原来坐标系的运动速度等于

$$\mathbf{v}_{1t}-\mathbf{H}_{1t}\sqrt{\frac{V}{4\pi}}=\mathbf{v}_{2t}-\mathbf{H}_{2t}\sqrt{\frac{V}{4\pi}}.$$

在新坐标系內，在間断面两侧，$\mathbf{v}$ 的三个分量与 $\mathbf{H}$ 的相应分量的比值相同，并等于$\sqrt{\frac{V}{4\pi}}$，也即是

$$\mathbf{v}_1=\mathbf{H}_1\sqrt{\frac{V}{4\pi}},\quad \mathbf{v}_2=\mathbf{H}_2\sqrt{\frac{V}{4\pi}}. \tag{53.12}$$

由此可見，在新坐标系內，速度与磁場一起旋轉，但其数值以及与法綫間的夹角保持不变。

速度 v_n 取相反的正負号，也是間断相对于流体的傳播速度。它等于三种电磁流体力学波中（§52）一种波的相速度（u_1）。这种相等性对任何旋轉間断都存在，这一事实在某种程度上是偶然的，但在間断面上各个量的跃变很小时，这种相等性却是必然的。实际上，这种間断代表一种弱扰动，这时速度 $\mathbf{v}$ 和磁場 $\mathbf{H}$ 获得垂直于通过$\mathbf{H}$和法綫 $\mathbf{n}$ 的平面的小增量。这种扰动恰好属于相速度为 u_1 的类型。小扰动波陣面傳播的物理速度为群速度在波陣面法綫方向、也即是在波矢量 $\mathbf{k}$ 上的投影。但由于 ω 和 $\mathbf{k}$ 成綫性关系，我們有

$$\frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{k}}\mathbf{k}=\omega,$$

因此，上述投影等于相速度$\frac{\omega}{k}=u_1$。

虽然切向間断和旋轉間断代表不同类型的間断，但也存在同时具有两者性质的間断。这种間断就是 $\mathbf{v}$ 和 $\mathbf{H}$ 在間断面上是切向的，而且只轉动而絕对值不变。

大家知道，在通常流体动力学內，切向間断对无穷小扰动常常是不稳定的，这就引起它們快速地扩展为湍流区域。但是磁場对

导电流体的运动有稳定作用，因而其中的切向間断可能为稳定的。这种情况的产生，是由于受到扰动时流体的横向移动（对場而言）使“粘在”流体上的磁力綫伸长的自然結果，同时引起出現一种力，趋向于恢复未扰动的运动。对不可压縮流体內的間断进行相应的研究（C. И. 西罗瓦茨基，1953），得到了使間断稳定所必須同时滿足的两个不等式：

$$H_1^2+H_2^2>2\pi\rho v^2, \qquad (53.13)$$

$$[\mathbf{H}_1\mathbf{H}_2]^2\geqslant 2\pi\rho([\mathbf{H}_1\mathbf{v}]^2+[\mathbf{H}_2\mathbf{v}]^2)$$

式中 $\mathbf{v}=\mathbf{v}_2-\mathbf{v}_1$ 为間断面上的速度跃变（参閱本节的例題 1）①。

但是，事实上，由于流体內存在小而有限的粘度和电阻，因而切向間断不会在无限长时間內保持如此，尽管条件(53.13)滿足。虽然这时也不发生湍流，但代替尖銳的間断面，我們得到逐漸扩展的过渡区域，其中速度和磁場从某一值平坦地变到另一值。

根据运动方程(51.12)和(51.13)，并在其中保留耗散項，很容易证明这一点。我們选擇間断面的法綫方向为 x 軸。假定全部量只与 x 坐标有关（也可能与时間有关），我們写下这些方程的横向分量为

$$\frac{\partial \mathbf{H}_t}{\partial t}=\frac{c^2}{4\pi\sigma}\frac{\partial^2\mathbf{H}_t}{\partial x^2},$$
$$\frac{\partial v_t}{\partial t}=\nu\frac{\partial^2 v_t}{\partial x^2} \qquad (53.14)$$

（假定流体不可压縮）。如果我們假定运动是稳定的，则这些方程的左侧为零。但是这时当 $x\to\pm\infty$ 时仍然为有限的唯一解，是 $\mathbf{H}_t=$ =常数，$\mathbf{v}_t=$常数，这与假定这些量的数值有变化的假設相矛盾。由此可見，切向間断沒有稳定的寬度（例如，如弱冲击波所具有

① 如果在間断两側不可压縮媒质的密度不同，则在这些条件下，ρ 应当用 $\frac{2\rho_1\rho_2}{\rho_1+\rho_2}$ 代替。

的)。(53.14)式为导热方程的形式。从导热理論可知,这方程所描写的量的間断随着时間的流逝扩展为过渡区域,过渡区域的寬度与时間的平方根成正比地增加。由于(53.14)两个方程內的系数不相同,因而速度的和場的变化区域的寬度 δ_v 和 δ_H 也不相同:

$$\delta_v \sim \sqrt{\nu t}, \quad \delta_H \sim \sqrt{\frac{c^2 t}{\sigma}}. \tag{53.15}$$

在不可压縮液体內,当磁場为任何值时,旋轉間断对无穷小扰动而言总是稳定的(C. И. 西罗瓦茨基,1953)。但是和切向間断一样,旋轉間断也不可能有稳定的寬度,在媒质的粘度和电阻的作用下,它們随时間而扩展(参閱例題 2)。

例　　題

1. 試求出磁場內不可压縮的理想导电流体內切向間断的稳定条件(C. И. 西罗瓦茨基)。

解①. 我們写出

$$\mathbf{v}=\mathbf{v}_0+\mathbf{v}', \quad p=p_0+p', \quad \mathbf{H}=\mathbf{H}_0+\mathbf{H}'$$

式中 $\mathbf{v}_0, p_0, \mathbf{H}_0$ 为未受扰动的恒定值(在間断面两側),而 $\mathbf{v}', p', \mathbf{H}'$ 为它們的小扰动值。代入到方程(51.11)—(51.13)內,对理想流体,我們得到

$$\operatorname{div}\mathbf{u}'=0, \quad \operatorname{div}\mathbf{v}'=0. \tag{1}$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t}=(\mathbf{u}\nabla)\mathbf{v}'-(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{u}', \tag{2}$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t}+(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}'=-\frac{1}{\rho}\nabla p'-[\mathbf{u}\operatorname{rot}\mathbf{u}']=-\frac{1}{\rho}\nabla(p'+\rho\mathbf{u}\mathbf{u}')+(\mathbf{u}\nabla)\mathbf{u}'. \tag{3}$$

为了簡单起見,我們在这里和下面略去了下角标0,并引进了符号 $\mathbf{u}=\mathbf{H}/\sqrt{4\pi\rho}$。把 div 作用到方程(3)上,并考虑到(1)式,我們得到

$$\Delta(p'+\rho\mathbf{u}\mathbf{u}')=0. \tag{4}$$

設 $x=0$ 为間断平面;矢量 $\mathbf{v}$ 和 $\mathbf{u}$ 与这面平行。在每半空間 $x>0$ 和 $x<0$ 內,我們求出全部量 $\mathbf{v}', \mathbf{u}', p'$ 的形式与 $e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)}e^{\kappa x}$ 成正比,式中 $\mathbf{k}$ 为 yz 平面內的二維矢量。从方程(4),我們得到 $k^2-\kappa^2=0$,于是在 $x<0$ 的一

① 参閱"連續介质力学"第二版,§30。

側，必須令 $\kappa=+k$，而在 $x>0$ 的一側，必須令 $\kappa=-k$。其次，从(2)和(3)式的 x 分量內消去 v'_x，我們得到①

$$p'+\rho\mathbf{u}\mathbf{u}'=-u'_x\frac{i\rho}{\kappa(\mathbf{ku})}[(\omega-\mathbf{kv})^2-(\mathbf{ku})^2]. \tag{5}$$

設 $\zeta=\zeta(y, z, t)$ 为間断面受到扰动时沿 x 軸的位移。在位移后的面上，应满足条件(53.5)和(53.6)：

$$\begin{gathered}\{p+\rho(\mathbf{u}+\mathbf{u}')^2\}\cong\{p'+\rho\mathbf{u}\mathbf{u}'\}=0,\\ u_{n1}+u'_{n1}\cong u'_{x1}-(\mathbf{u}_1\nabla)\zeta=0,\\ u_{n2}+u'_{n2}\cong u'_{x2}-(\mathbf{u}_2\nabla)\zeta=0\end{gathered} \tag{6}$$

(沒有流体通过間断面的条件，这时自动地满足)。

假定 $\zeta=$ 常数$\cdot e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)}$，并从(6)式的三个方程內消去 ζ, u_{x1}, u_{x2}，我們得到确定 ω 的可能值的方程为

$$(\omega-\mathbf{kv}_1)^2+(\omega-\mathbf{kv}_2)^2=(\mathbf{ku}_1)^2+(\mathbf{ku}_2)^2.$$

这二次式沒有复数根，如果

$$2(\mathbf{ku}_1)^2+2(\mathbf{ku}_2)^2-(\mathbf{k}, \mathbf{v}_2-\mathbf{v}_1)^2>0$$

或者

$$[2u_{1i}u_{1k}+2u_{2i}u_{2k}-(v_{2i}-v_{1i})(v_{2k}-v_{1k})]k_ik_k>0.$$

如果方括号內的二秩張量的迹和行列式是正的，則这二次式也是正的。由此也可得到正文內所指出的条件(53.13)。

2. 試求出旋轉間断随时間而扩展的規律。

解. 假定全部量只依賴于 x 坐标(和时間)，从方程 $\operatorname{div}\mathbf{v}=0$ 和 $\operatorname{div}\mathbf{H}=0$ 得出：$v_x=$ 常数，$H_x=$ 常数。我們选擇坐标系为：在間断面的两側(即离过渡层很远处)，v 值和 $\mathbf{H}$ 值的关系为(53.12)式；于是 $v_x=u_x$（$\mathbf{u}$ 和例題 1 內的相同)。对于横向分量 $\mathbf{u}_t$ 和 $\mathbf{v}_t$，从(51.12)和(51.13)式，我們得到方程为

$$\begin{gathered}\frac{\partial\mathbf{u}_t}{\partial t}+u_x\frac{\partial\mathbf{u}_t}{\partial x}=u_x\frac{\partial\mathbf{v}_t}{\partial x}+\frac{c^2}{4\pi\sigma}\frac{\partial^2\mathbf{u}_t}{\partial x^2},\\ \frac{\partial\mathbf{v}_t}{\partial t}+u_x\frac{\partial\mathbf{v}_t}{\partial x}=u_x\frac{\partial\mathbf{u}_t}{\partial x}+\nu\frac{\partial^2\mathbf{v}_t}{\partial x^2}.\end{gathered} \tag{1}$$

因为 $x\to\pm\infty$ 时，由于关系式(53.12)，差值 $\mathbf{v}_t-\mathbf{u}_t=0$ 变成零，因而在过渡层內，它小于 $\mathbf{v}_t+\mathbf{u}_t$ 之和。把(1)式的两个方程相加后，于是我們可以略去

---

① 方括号內的式子变为零的情况，我們不感兴趣，因为这时 ω 为实值，而不稳定性只与 ω 的复数值有关。

含有 $\mathbf{v}_{t}-\mathbf{u}_{t}$ 的項，因而得到

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{v}_t+\mathbf{u}_t)=\frac{1}{2}\left(\frac{c^2}{4\pi\sigma}+\nu\right)\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\mathbf{v}_t+\mathbf{u}_t).$$

由此看出，間断的寬度按下列定律而改变：

$$\delta\sim\sqrt{\left(\frac{c^2}{4\pi\sigma}+\nu\right)t}.$$

§54. 冲击波

我們現在轉到研究下列类型的間断，其中

$$j\neq 0,\quad \{V\}\neq 0. \tag{54.1}$$

这种間断和在通常的流体动力学內一样，称为冲击波。它們的特征是存在密度的跃变和有气体通过它們(v_{n1} 和 v_{n2} 不为零)。磁場的法向分量，一般說来不为零，但在特殊情况下，也可能有 $H_n=0$。

比較(53.3)和(53.4)式，我們看出，当 $H_n\neq 0$ 时，矢量 $\mathbf{H}_{t2}-\mathbf{H}_{t1}$ 和 $V_2\mathbf{H}_{t2}-V_1\mathbf{H}_{t1}$ 都平行于同一矢量 $\mathbf{v}_{2t}-\mathbf{v}_{1t}$，因而它們彼此平行。由此得出，$\mathbf{H}_{t1}$ 和 $\mathbf{H}_{t2}$ 平行，也即是矢量 $\mathbf{H}_1$ 和 $\mathbf{H}_2$ 与表面的法綫在同一平面內，这与切向間断和旋轉間断相反，在这些間断內，一般說来，平面 $\mathbf{H}_1, \mathbf{n}$ 和平面 $\mathbf{H}_2, \mathbf{n}$ 不重合。这結果当 $H_n=0$ 时也正确，这时，从(53.4)式得出，$V_1\mathbf{H}_{1t}=V_2\mathbf{H}_{2t}$(这种情况将在下面詳細研究)。

速度的跃变 $\mathbf{v}_{t2}-\mathbf{v}_{t1}$，和 $\mathbf{H}_1$，$\mathbf{H}_2$ 在同一平面上。显然，对普遍性无任何限制，我們可以假定，矢量 $\mathbf{v}_1$ 和 $\mathbf{v}_2$ 也在同一平面內，于是冲击波內的运动按其本质来說为平面运动。而且容易看出，当 $H_n\neq 0$ 时，由适当变换坐标系，常常可以使在間断面两侧，$\mathbf{v}$ 与 $\mathbf{H}$ 互相平行。为此，必須变换到新坐标系，它相对于原来坐标系的运动速度为

$$\mathbf{v}_t-\frac{v_n}{H_n}\mathbf{H}_t=\mathbf{v}_t-\frac{jV}{H_n}\mathbf{H}_t$$

[由于(53. 4)的边界条件，在間断两側，这个量的数值相同]。但是，在下面的公式內，我們将不假定这种特别的坐标系的选擇。

我們引进一个关系式，它对于电磁流体力学中的冲击波所起的作用和通常流体力学中的雨果紐(Hugoniot)絕热相同。从(53. 3)和(53. 4)式消去$\{\mathbf{v}_t\}$，我們得到这关系式为

$$j^2\{VH_t\}=\frac{H_n^2}{4\pi}\{H_t\}; \tag{54. 2}$$

我們在这里用H_t代替$\mathbf{H}_t$，已注意到$\mathbf{H}_{t1}$和$\mathbf{H}_{t2}$平行。为了从(53. 1)式內消去$\mathbf{v}_t$，我們把它改写成下列形式:

$$\{w\}+\frac{j^2}{2}\{V^2\}+\frac{1}{2}\{(\mathbf{v}_t-\frac{H_n}{4\pi j}\mathbf{H}_t)^2\}+\frac{1}{4\pi}\{VH_t^2\}-$$

$$-\frac{1}{32\pi^2 j^2}H_n^2\{H_t^2\}=0.$$

由于(53. 3)式，第三項变成零，于是$\mathbf{v}_t$被消去。在最后一項內，代入(54. 2)內的j^2，而在第二項內代入(53. 2)內的j^2，也即是

$$j^2=\frac{p_2-p_1+\frac{1}{8\pi}(H_{t2}^2-H_{t1}^2)}{V_1-V_2}. \tag{54. 3}$$

經过簡单的計算后，于是最后得到

$$(\varepsilon_2-\varepsilon_1)+\frac{p_2+p_1}{2}(V_2-V_1)+\frac{1}{16\pi}(V_2-V_1)(H_{t2}-H_{t1})^2=0. \tag{54. 4}$$

这也就是所求的电磁流体力学中的“冲击絕热方程”。它和通常方程的不同点是多第三項。

在这里我們再一次写出(53. 3)式:

$$v_{t2}-v_{t1}=\frac{H_n}{4\pi j}(H_{t2}-H_{t1}), \tag{54. 5}$$

由这个式子，可以从H_t的跃变求出v_t的跃变。方程(54. 2)—(54. 5)是描写冲击波的完全方程組。当全部量的跃变趋近于零

时，冲击波的傳播速度必須趋近于小扰动的傳播速度。在通常的流体动力学中，这表明弱冲击波的速度趋近于声速。但在电磁流体力学中，弱冲击波可以有两种不同的傳播速度(u_2 和 u_3)①。

我們更深入地来研究一下弱冲击波，并且了解一下其中的各个量在那一方向上改变。把方程(54.4)展开为压强和熵的跃变值的冪級数，我們得到②

$$T(s_2-s_1)=\frac{1}{12}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2}\right)_s(p_2-p_1)^3-$$
$$-\frac{1}{16\pi}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_s(p_2-p_1)(H_{2t}-H_{1t})^2. \qquad (54.6)$$

气体通过冲击波时，气体的熵只能增加：$s_2>s_1$。但按照热力学不等式，有$\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_s<0$，而导数$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2}\right)_s$对这里所涉及的各种媒质均为正的。因此，从(54.6)式看出，从条件 $s_2>s_1$，可以得到不等式 $p_2>p_1$，因而 $V_2<V_1$。由此可見，和在通常的流体动力学中一样，冲击波是压縮波。这結果在这里虽然是对弱冲击波证明的，但看来对任何强度的冲击波也都是正确的。

对弱冲击波而言，我們还可以对磁場的改变方向作出一定判断。当气体状态受到小扰动时，各个量的变化由(52.8)和(52.9)式相互联系起来。对变化 $\delta\rho=\rho_2-\rho_1$ 和 $\delta(H_t^2)=H_{t2}^2-H_{t1}^2$，我們得到

$$\delta(H_t^2)=8\pi\delta\rho(u^2-u_0^2).$$

因为 $u_2>u_0$ 和 $u_3<u_0$[参看(52.15)式]，而按照上面所述，总是 $\delta\rho>0$，于是我們看出，在两种不同的弱冲击波內，H_t^2 因而也是 $H^2=H_t^2+H_n^2$ 的改变方向各不相同。在以速度 $\sim u_2$ 傳播的波內，磁場加强，而在以速度 $\sim u_3$ 傳播的波內，磁場减弱。

① 以速度 u_1 傳播的扰动，按其特征，相应于旋轉間断，如前一节所指出的。

② 参閱“連續媒质力学”第二版，§83。

我們現在来研究弱磁場內的冲击波，也即是假定在間断两側，$H^2 \ll \rho u^2$。此外，我們对全部量的跃变值不附加任何的限制；特别是磁場的跃变值可以和它的总值相比較。

在这里仍然有两种可能性。假定密度和压强的跃变不很小，于是在第一近似內，我們可以略去(54.4)式內的最后一項，以及略去(54.3)式內的磁場。因而我們又得到通常的流体动力学公式。由此可見，各个热力学量的跃变值之間的关系和冲击波的傳播速度，将和通常的冲击波时的相同。磁場变化可从关系式(54.2)求出。因为等式右側为場的三級小量，因而左側也必須相同。在第一近似內，可以令$\{VH_t\}=V_2H_{t2}-V_1H_{t1}\cong 0$，由此得

$$\frac{H_{t2}}{H_{t1}}=\frac{V_1}{V_2}=\frac{\rho_2}{\rho_1}.$$

既然在通常的冲击波內总是$V_1>V_2$，因而我們看到，在我們所研究的波內，磁場加强。

方程(54.2)—(54.4)还容許另一种可能性。場很小的假定对$V_1\cong V_2$的波，也与(54.2)式是相容的，而j^2是一个二級小量，等于

$$j^2=\frac{H_n^2}{4\pi V}, \tag{54.7}$$

式中V为V_1和V_2的共同值。从(54.3)式看出，令$V_1=V_2$后，在相同的近似內，我們必須令

$$p_2-p_1=-\frac{1}{8\pi}(H_{t2}^2-H_{t1}^2). \tag{54.8}$$

密度为連續的表明，可以把这种类型的冲击波看作是不可压縮流体內的間断。在这間断上，矢量$\mathbf{H}_t$(因而$\mathbf{v}_t$)的数值有跃变，但方向不变，而压强的跃变(保持密度不变)，可由(54.8)式从磁場的跃变求出。这种間断的傳播速度为

$$v_{n2}=v_{n1}=jV=H_n\sqrt{\frac{V}{4\pi}}.$$

这結果完全是自然的，而且这种間断存在的必要性可以预先看出来。我們在 § 52 內已看到，在不可压縮流体內，磁場的小扰动只有一种傳播速度，等于$\frac{\mathbf{H}}{\sqrt{4\pi\rho}}$。因此，小扰动的波陣面以速度$u_1=\frac{H_n}{\sqrt{4\pi\rho}}$而移动，不論場变化 $\delta\mathbf{H}$ 垂直或者平行于 $\mathbf{H}$ 和 $\mathbf{n}$ 的平面，都是一样。其中第一种情况相应于弱强度的旋轉間断（前一节內已討論过），第二种情况（当跃变很小时）相应于剛才所討論的間断。

为了查明这些間断內磁場强度的改变方向，我們来研究还未利用过的方程(54.4)，并把它写成(54.6)的形式（推导后一方程时，并沒有假定磁場的跃变值比場本身小）。将(54.8)式的差值 p_2-p_1 代入后，我們发現，(54.6)式右側第二項是場的四級小量，而第一項为六級小量，因而可以略去。从条件 $s_2>s_1$ 直接得出

$$H_{t2}<H_{t1},$$

也即是在这种間断內磁場强度減小。

我們重新回到任意大小磁場內的任意强度的冲击波，我們来研究两种特殊情况。設在側 1 上磁場垂直于冲击波的波陣面，也即是 $\mathbf{H}_{t1}=0$。于是(54.2)式变成

$$j^2V_2H_{t2}=\frac{H_n^2}{4\pi}H_{t2}.$$

由此看出，或者 $H_{t2}=0$，或者是 H_{t2} 具有任意值，而

$$j^2=\frac{H_n^2}{4\pi V_2}.$$

在第一种情况下，磁場保持与間断面垂直，因而一般并不影响冲击波的性质，因为它已从全部方程內消去了。在第二种情况下，我們遇到磁場方向改变的冲击波，冲击波相对于冲击波后面气体的傳播速度为

$$v_{n2}=jV_2=\frac{H}{\sqrt{4\pi\rho_2}}.$$

另一个特殊情况是：在間断面两側，冲击波与磁場方向垂直($H_n=$ $=0$)①。在这种情况下，从(54.5)式，我們得到 $\mathbf{v}_{t2}=\mathbf{v}_{t1}$，也即是速度的切向分量仍是連續的。因此由适当选擇坐标系，常常可以使得在突变面两側，$v_t=0$，也即是使气体垂直于間断面而运动；下面我們即假定如此。其次，从(54.2)式，我們得到

$$V_2H_2=V_1H_1.$$

注意到这一关系式，容易证明，(54.3)式和(54.4)式可以写成

$$j^2=\frac{p_2^*-p_1^*}{V_1-V_2},$$

$$\varepsilon_2^*-\varepsilon_1^*+\frac{p_2^*+p_1^*}{2}(V_2-V_1)=0,$$

这和沒有磁場时的通常的冲击波方程不同之处只是状态方程有了改变，即代替眞实的方程 $p=p(V, s)$，必須利用方程 $p^*=p^*(V, s)$，式中

$$p^*=p+\frac{b^2}{8\pi V^2},$$

而字母 b 表示恒定乘积 HV。相应地 ε^* 必須这样定义，使热力学关系式$\left(\frac{\partial\varepsilon^*}{\partial V}\right)_s=-p^*$ 被滿足，由此得

$$\varepsilon^*=\varepsilon+\frac{b^2}{8\pi V}.$$

前一节曾經指出了同时具有切向間断和旋轉間断性质的間断是存在的。这些間断对冲击波也有相似的关系。冲击波和旋轉間断間的过渡間断是这样的間断，其密度不变，而磁場的改变为 $\mathbf{H}_t$ 变号。冲击波和切向間断間的过渡間断是这样的間断，其 $v_n=0$

① 当 $H_n=0$ 时，总共只有一种冲击波，这相应于两个速度 u_2 和 u_3 中有一个变为零，u_3 为零的小扰动，相当于弱切向間断，它相对于流体本身是靜止的。

和 $H_n=0$, 而 $\mathbf{H}_t$ 的数值有任意的跃变，但方向不改变。

結束前面两节关于电磁流体力学中的間断的研究，我們在这里再一次列出它們的不同类型：

1. 接触間断：

$$j=0,\ \{\mathbf{v}_t\}=0,\ \{V\}\neq 0,\ \{p\}=0,\ H_n\neq 0,\ \{\mathbf{H}_t\}=0.$$

2. 切向間断：

$$j=0,\ \{\mathbf{v}_t\}\neq 0,\ \{V\}\neq 0,\ \left\{p+\frac{H_t^2}{8\pi}\right\}=0,\ H_n=0,\ \{\mathbf{H}_t\}\neq 0.$$

3. 旋轉間断：

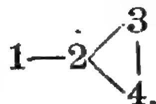
$$j\neq 0,\ \{\mathbf{v}_t\}\neq 0,\ \{V\}=0,\ \{p\}=0,\ H_n\neq 0;$$

矢量 $\mathbf{H}_t$ 迴轉但数值不改变。

4. 冲击波：

$j\neq 0$, $\{V\}\neq 0$; 矢量 $\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2, \mathbf{n}$ 共平面。

在这四种間断类型中还存在过渡情况，如下图：



§55. 导电流体湍流运动时的自发磁場

导电流体的湍流运动具有一种奇异的性质：它可以引起相当强的自发磁場。在导电流体內常常存在由流体运动以外的因素所引起的小扰动[①]，并且伴随着产生微弱的电場和磁場。問題在于：这些扰动以后的行为如何？也即是由于湍流运动的結果，这些扰动平均說来随时間加强还是随时間减弱？下面所提出的設想指出，按照流体本身的性質，两种可能性都可能发生[②]。

磁場扰动一旦产生后随时間变化的过程，取决于两种物理因

① 例如，流体旋轉部分出現磁机械效应或甚至热起伏。

② 这一节所叙述的結果是 Г.巴契罗尔提出的(1950)。

素的作用。一方面，由于磁能轉变成感应电流的焦耳热，磁能发生耗散，使磁場减小。另一方面，由于磁力綫"伸长"而产生的特殊电磁流体力学效应，又使磁場趋向于增加。§ 51 末曾經指出，当导电性强的流体发生运动时，磁力綫也和"流綫"一样运动，而且在磁力綫每一点处，磁場强度与磁力綫的伸长成正比地改变。但是在湍流运动中，任何两个相邻的流体粒子，平均說来随时間流逝而散开。結果磁力綫伸长，而磁場加强。

我們現在来证明，在适当的条件下，这两种相反的趋势可以相互抵銷，因而我們就得到一种判据，可以确定磁場扰动在那种情况下增强，而在那种情况下衰减。

只要流体运动所产生的磁場相当微弱，我們就可以略去磁場对流体运动的反作用。換句話說，我們得到純粹的流体力学湍流，它产生一种"本底"，在这本底上形成磁扰动。我們假定湍流的速度場在湍流理論所指的意义上是稳定的，也即是說它的平均特征保持不变①。

从数学上說，上述忽略反作用不計表明，在运动方程(51.13)內，我們可以略去場的二次項，也即是又回到了通常的納維-斯托克斯方程：

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}+(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}=-\nabla\frac{p}{\rho}+\nu\Delta\mathbf{v}$$

(假定流体是不可压縮的)。如果把項$(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}$变换为

$$(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}=\operatorname{grad}\frac{v^2}{2}-[\mathbf{v}\operatorname{rot}\mathbf{v}],$$

然后把 rot 作用到这方程的两侧，于是我們得到

$$\frac{\partial \mathbf{\Omega}}{\partial t}=\operatorname{rot}[\mathbf{v}\mathbf{\Omega}]+\nu\Delta\mathbf{\Omega}, \tag{55.1}$$

---

① 注意到是指对与湍流脉动周期同数量級的时間間隔求平均，但当然，这周期小于全部的观察时間。

式中为简单起見，引进了符号 $\mathbf{\Omega}=\frac{1}{2}\operatorname{rot}\mathbf{v}$。

把这方程与(51. 2)式比較:

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}=\operatorname{rot}[\mathbf{vH}]+\frac{c^2}{4\pi\sigma}\Delta\mathbf{H}, \tag{55. 2}$$

它确定磁場随时間的变化（当速度分布保持不变）。我們看出，$\mathbf{\Omega}$ 和 $\mathbf{H}$ 滿足同一形式的方程，如果 $\nu=\frac{c^2}{4\pi\sigma}$，則这些方程完全相同。因此，在后一种情况下，(55. 2)式存在这样的解，其中

$$\mathbf{H}=\text{常数}\cdot\mathbf{\Omega}. \tag{55. 3}$$

由此可見，如果

$$\nu=\frac{c^2}{4\pi\sigma}, \tag{55. 4}$$

則可以存在稳定的磁場(按照"稳定"一詞的本义)。当(55. 3)式內的常系数取任何值时，这磁場平均說来旣不衰減也不增强。可以說存在随遇平衡，在这种平衡下，上面所指出的影响磁場变化的两个因素，恰好相互抵消了。

由此明显看出，如果流体的电导率大于$\frac{c^2}{4\pi\nu}$，則电磁能量的耗散損失将不足以抵消由磁力綫伸长所引起的磁場的增加。这样一来，我們得到不等式:

$$\frac{4\pi\nu\sigma}{c^2}>1 \tag{55. 5}$$

它是小的磁扰动增加时引起产生自发磁場的条件①。

可以說，这是湍流运动相对于无穷小磁扰动不稳定的条件。值得注意的是，这个条件的成立可能是定量的，并不只是在数量級

---

① 条件(55.5)是很严格的。例如，就汞来說($\sigma\cong10^{16}$ 秒$^{-1}$，$\nu=1.2\cdot10^{-3}$ 厘米^2/秒)，(55.5)式左側的量仅为 $1.5\cdot10^{-7}$。因为 σ 和 ν 分别随电荷和质量的載荷体的平均自由程而增加，因而条件(55.5)例如在色球、日冕和星际电离气体內可以被滿足。

上[1]。

条件(55. 5)作为磁場增加的判据，只要推导它时略去磁場对流体运动的反作用是正确的，则(55. 5)式也是正确的。磁場的增加将一直继續到建立一定的稳定状态，这时已不能再略去磁場的反作用。虽然，严格說来，在这种状态內，湍流的純粹流体力学性质已不和原先的相同，但是这种情况对求出所建立的磁場的定性分布及其数量級，并不重要。

容易看出，磁場的分布必須和湍流分布 Ω 相类似。实际上，从直观的观点看来，Ω 是空間一定点处流体的轉动角速度。因为磁力綫和流体一同运动，因而矢量 $\mathbf{H}$ 也以相同的角速度轉动。所以，如果在湍流的任意两点上，Ω 的瞬时値平均說来是互不关联的，则这两点处的矢量 $\mathbf{H}$ 也互不关联地轉动，因而它們的相对取向也随时間完全无序地改变。

为此，我們提醒一下湍流的某些純流体力学性质[2]。湍流运动可以看成是不同大小的“湍流脉动”的集合，从最大的“外尺度” l 到最小的“內尺度” λ_0。前者等于一个特征长度，这长度确定了发生湍流运动的区域的大小。后者給出一个距离的数量級，在这距离上粘度和由它所引起的能量耗散会变为重要的。λ_0 可用 l 和整个湍流运动的雷諾数 $\mathbf{R}\sim\frac{ul}{\nu}$ 来表示（u 的数量級等于距离 l 上平均速度改变的数量級），或者用 1 克流体在 1 秒內所耗散的能量 ε 来表示，即表示成下式：

$$\lambda_0\sim\left(\frac{\nu^3}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{4}}\sim\frac{l}{\mathbf{R}^{\frac{3}{4}}}. \tag{55. 6}$$

---

[1] 应該指出，上述理由虽是可信的，但不是已完全证明了的。例如 Я. Б. 澤耳多維奇(Зельдович)已证明，它显然不能应用于所假定的“二維”湍流情况（ЖЭТФ. 31, 154, 1956）。

[2] 参閱“連續媒质力学”第二版 §§31—33。

在相距 λ 的两点 *1* 和 *2* 处的速度 $\mathbf{v}_1$ 和 $\mathbf{v}_2$ 的关联，基本上取决于 λ 尺度的脉动。按照柯耳莫戈洛夫-阿布荷夫定律，对于 $\lambda \gg \lambda_0$ 的距离，我們得到

$$\overline{\Delta v_i \Delta v_k} \backsim \lambda^{\frac{2}{3}},$$

式中 $\Delta \mathbf{v} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$。在 $\lambda \ll \lambda_0$ 的距离上，

$$\overline{\Delta v_i \Delta v_k} \backsim \lambda^2.$$

由此容易求出角速度的关联。因为分量 $\mathbf{\Omega}_1$ 和 $\mathbf{\Omega}_2$ 可以分别用 $\mathbf{v}_1$ 和 $\mathbf{v}_2$ 的导数来表示，因而将 $\overline{\Delta v_i \Delta v_k}$ 对点 *1* 的坐标求微分一次，再对点 *2* 的坐标求微分一次后，我們得到

$$\begin{aligned} &\overline{\Omega_{1i}\Omega_{2k}} \backsim \lambda^{-\frac{4}{3}}, \text{ 当 } \lambda \gg \lambda_0, \\ &\overline{\Omega_{1i}\Omega_{2k}} = \text{常数}, \text{ 当 } \lambda \ll \lambda_0. \end{aligned} \tag{55.7}$$

这些公式指明只在达到 $\sim\lambda_0$ 的距离处，角速度的关联才占重要，而在更大的距离时，这种关联很快地减弱。

根据以上所述，自发磁場的分布具有相同的特征。它只在 $\sim\lambda_0$ 綫度的空間內有关联分布。在更大的距离上，矢量 $\mathbf{H}$ 的相对取向实际上完全是无序的。

由算出完全运动方程：

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\nabla\frac{p}{\rho} + \nu\Delta\mathbf{v} - \frac{1}{4\pi\rho}[\mathbf{H}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{H}]$$

內的各項，現在很容易求出磁場的数量級。既然矢量 $\mathbf{H}$ 在 $\sim\lambda_0$ 的距离上完全改变方向，因而方程右側最后一項的数量級为

$$\frac{H^2}{4\pi\rho\lambda_0}.$$

另一方面，我們来計算 $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}$ 項。对于 λ 尺度的脉动，它的数量級为 $\frac{v_\lambda^2}{\lambda}$，式中 v_λ 为在 λ 距离上的速度变化。但是按照湍流理論中熟知的公式，我們有

$$v_\lambda \sim u\left(\frac{\lambda}{l}\right)^{\frac{1}{3}}, \quad \text{当 } \lambda \gg \lambda_0,$$
$$v_\lambda \sim \frac{u}{l}\sqrt{\mathbf{R}}\,\lambda, \quad \text{当 } \lambda \ll \lambda_0. \tag{55.8}$$

因此，当 $\lambda \gg \lambda_0$ 时，比值$\frac{v_\lambda^2}{\lambda} \backsim \lambda^{-\frac{1}{3}}$，当 $\lambda \ll \lambda_0$ 时，$\frac{v_\lambda^2}{\lambda} \backsim \lambda$，因而当 $\lambda \sim \lambda_0$ 时它有极大值 由此可見

$$(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} \sim \frac{v_{\lambda_0}^2}{\lambda_0}.$$

最后，比較两項的大小，我們得到

$$H^2 \sim 4\pi\rho v_{\lambda_0}^2. \tag{55.9}$$

按照(55.6)和(55.8)，$v_{\lambda_0} \sim u\mathbf{R}^{-\frac{1}{4}} \sim (\nu s)^{\frac{1}{4}}$。因此，也可以写为

$$H^2 \sim \frac{4\pi\rho u^2}{\sqrt{\mathbf{R}}} \sim 4\pi\rho\sqrt{s\nu}. \tag{55.10}$$

这些式子亦确定了自发磁場的数量級。有趣的是将磁場能与流体的湍流运动能进行比較。大家知道，后者基本上集中在尺度最大的脉动內(尺度为$\sim l$)，其数量級为 ρu^2。磁能基本上集中在小尺度 $\sim\lambda_0$ 的“磁脉动”內。根据(55.9)式，磁能可以和相同尺度的湍流的动能相比較，但是根据(55.10)，它小于总动能。这些論断更精确的数学表述是：如果把速度和磁場的空間分布展开为傅立叶积分，則动能基本上集中在包含小波矢量 $k \sim \frac{1}{l}$ 的譜分量內，而磁能則集中在包含大波矢量 $k \sim \frac{1}{\lambda_0}$ 的譜分量內。

在湍流运动中，能量不断地从大尺度的脉动傳到小尺度的脉动，并且实际上沒有任何耗散。只在 λ_0 尺度的脉动內，这“能流”才发生耗散。当磁場不存在时，耗散的机构完全是由于流体的粘滞性。在本节所研究的导电流体的湍流运动中，λ_0 尺度的脉动內的能量，一部分由于流体的粘滞性而引起耗散，另一部分由轉变为

磁場能，然后变成焦耳热而耗散。

我們現在来計算建立稳定态所需的时間，为此，我們来研究(55.2)式，其右側两項的数量級分别为

$$\frac{Hv_{\lambda_0}}{\lambda_0}=\frac{Hv_{\lambda_0}\lambda_0}{\lambda_0^2}\sim\frac{H\nu}{\lambda_0^2}\text{和}\frac{c^2H}{4\pi\sigma\lambda_0^2}.$$

既然我們已知道随遇平衡存在的精确条件(55.4)，因而我們也可知道这两項內的系数間的精确关系式，并且可写为

$$\frac{\partial H}{\partial t}\sim\left(\nu-\frac{c^2}{4\pi\sigma}\right)\frac{H}{\lambda_0^2}.$$

由此看出，小扰动按指数定律随着时間而增加:

$$\exp\left\{\left(\nu-\frac{c^2}{4\pi\sigma}\right)\frac{t}{\lambda_0^2}\right\}. \tag{55.11}$$

如果$\frac{4\pi\sigma\nu}{c^2}\gg 1$，則簡单地有 $e^{\frac{\nu t}{\lambda_0^2}}$。于是初始小扰动$\sim H_0$扩展成为(55.10)式的稳定場$H$的时間$\tau$的数量級为

$$\tau\sim\frac{\lambda_0^2}{\nu}\ln\frac{H^2}{H_0^2}\sim\left(\frac{\nu}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}}\ln\frac{\rho(\varepsilon\nu)^{\frac{1}{2}}}{H_0^2}. \tag{55.12}$$

在湍流运动中，磁場随时間无序地改变表明，$\mathbf{H}$ 对时間的平均值变为零。換句話說，在我們所研究的情况下(也即是在容許有自发磁場的条件下)，不为零的平均磁場的存在是与湍流不相容的。这一性质必然导至，在湍流运动的流体上(在有限体积內)加上不十分强的外磁場，則該流体的行为就和超导体一样。因而相当强的磁場($H^2\geqslant\rho u^2$)必然会透入到流体內，从而“压制”着湍流。

第九章 电磁波方程

§56. 色散不存在时电介质内的場方程

在§45內我們曾写出了金屬內的交变电磁場方程:

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{H}=\frac{4\pi}{c}\sigma\mathbf{E},\qquad \mathrm{rot}\,\mathbf{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t},\tag{56.1}$$

这些方程当場变化相当"慢"时是正确的: 場的頻率必須使相应于定态情况下的 $\mathbf{j}$ 对 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B}$ 对 $\mathbf{H}$ (如果后者一般說来是重要的話)的关系仍然保持正确①。

現在我們轉到研究电介质內交变电磁場的类似問題，并且表述出适用于某些頻率的場方程，在这些頻率时 $\mathbf{D}$ 和 $\mathbf{E}$ 以及 $\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{H}$ 間的关系和在恒定場中相同。如通常的情况，如果这种关系是簡单的比例关系，則上述的条件表明，可以假定

$$\mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E},\qquad \mathbf{B}=\mu\mathbf{H},\tag{56.2}$$

其中 ε 和 μ 为靜态值。

如果頻率和引起物质电极化或磁极化的分子或电子振动的本征頻率相近，則这些关系式就遭到破坏(或者說，ε 和 μ 出現色散)这些頻率的数量級与物质的种类有关，并且在很寬的范圍內变化。对电現象和磁現象，这頻率的数量級也可能完全不同②。

---

① 条件 $l\ll\lambda$ 与(56.1)式的有效性无关，对第七章內所研究的問題，这条件的意义是: 可以容許忽略导体外的場內的滞后效应。

② 例如，在金剛石內，电极化是由于电子引起的，ε 的色散只从光譜的紫外区开始，在像水这样的极性液体內，极化是由于具有剛性偶极矩的分子的取向所引起的，而且 ε 的色散从頻率 $\omega\sim10^{11}$ 开始(也即从厘米波段开始)。在铁磁物质內，μ 的色散开始得还要早些。

在精确的微观的麦克斯韦方程內，直接用平均值 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B}$ 代换 $\mathbf{e}$ 和 $\mathbf{h}$，我們得到方程：

$$\operatorname{div} \mathbf{B}=0, \tag{56.3}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}=-\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \tag{56.4}$$

因此，这些方程在任何条件下都是适用的。对精确的微观方程 $\operatorname{div} \mathbf{e}=4\pi\rho$ 求平均值，我們得到方程：

$$\operatorname{div} \mathbf{D}=0, \tag{56.5}$$

（参閱 §6），而且只利用了导体的总电荷等于零这一条件。十分显然，这种推导和 §6 内所假定的場的靜态性质完全无关，因而方程(56.5)在交变場内也是正确的。

对精确方程

$$\operatorname{rot} \mathbf{h}=\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t}+\frac{4\pi}{c}\rho\mathbf{v} \tag{56.6}$$

求平均值，还可以再得到一个方程。由直接取平均得出

$$\operatorname{rot} \mathbf{B}=\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}+\frac{4\pi}{c}\overline{\rho\mathbf{v}}. \tag{56.7}$$

但是对与时間有关的宏观場，要得到平均值 $\overline{\rho\mathbf{v}}$ 与前面所引入的量之間的关系，則是相当困难的。比較簡单的是不直接求平均值，而利用下面更为形式的方法来求平均。

我們暫时假定，在电介质內放入了体密度为 $\rho_{外}$ 的外电荷，这些电荷运动时产生"外"电流 $\mathbf{j}_{外}$，而这些电荷的守恒由連續性方程表示：

$$\frac{\partial \rho_{外}}{\partial t}+\operatorname{div} \mathbf{j}_{外}=0.$$

于是代替(56.5)式，我們有

$$\operatorname{div} \mathbf{D}=4\pi\rho_{外}$$

［参閱(6.8)］。将这等式对时間求微分，并利用連續性方程，我們

得到

$$\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\mathbf{D}=4\pi\frac{\partial\rho_{外}}{\partial t}=-4\pi\operatorname{div}\mathbf{j}_{外},$$

或

$$\operatorname{div}\left(\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}+4\pi\mathbf{j}_{外}\right)=0.$$

由此得出，在符号 div 下的矢量可以写成另一矢量(表示为 $c\mathbf{H}$)的旋度形式；于是

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}=\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}_{外}+\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}. \tag{56.8}$$

在物体外，这些方程必須与真空內的精确的麦克斯韦場方程相同，这相应于矢量 $\mathbf{H}$ 等于磁場强度，在物体內，在靜态情况下，电流 $\mathbf{j}_{外}$ 和磁場的关系式为

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}=\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}_{外},$$

式中 $\mathbf{H}$ 为 § 27 內所引入的量，并以一定的方式和平均場强 $\mathbf{B}$ 联系起来 由此得出，在頻率趋近于零的极限情况下，(56.8)式內的矢量 $\mathbf{H}$ 等于靜态值 $\mathbf{H}(\mathbf{B})$，而我們所假定的場的变化"很慢"表明，对这样的交变場，相同的关系 $\mathbf{H}(\mathbf{B})$ 有效。由此可見，$\mathbf{H}$ 变成完全确定的量，在消去輔助量 $\mathbf{j}_{外}$ 以后，我們最后得到方程：

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}=\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}. \tag{56.9}$$

对电介质来說，这个方程代替了金屬內的場方程 (56.1) 的第一式。可能会认为，对于金屬內的交变場，在这个方程內还必須計及含有导数$\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}$的項，也即是写为

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}=\frac{4\pi}{c}\sigma\mathbf{E}+\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}, \tag{56.10}$$

其中系数 ε 为常数。

但是对于良导体(眞正的金屬)，这一項的引入是毫无意义的。

(56.10)式右侧的两项实质上是展开为場頻率的冪級数的头两項。既然假定了后者很小，因而考虑第二項充其量也只是表明引入了一个小修正項。实际上，它甚至还沒有这样的意义，因为事实上，在金属內，对場的空間分布不均匀性所引起的修正項，要比对频率的修正项更早地显示出来(参閱260頁上的底注)。

但是对特殊的一类物体，即不良导体，(56.10)式可能有意义。由于某种特殊原因(半导体內傳导电子很少、电解质溶液內离子的迁移率很小)，这些物质的电导率非常之小，因此，在 σ 和 ε 还可以认为常数的频率下，(56.10)式右側第二項可以和第一項相比，或者甚至超过第一項。在单色場內，第二項与第一項的比值为

$$\frac{\varepsilon\omega}{4\pi\sigma}.$$

如果这比值很小，则物体的行为和电导率为 σ 的普通导体相同。当頻率 $\omega\gg\frac{4\pi\sigma}{\varepsilon}$ 时，物体的行为和介电常数为 ε 的电介质相同。

在 ε 和 μ 为常数的均匀媒质內，方程(56.3)—(56.5)和(56.9)变成

$$\operatorname{div}\mathbf{E}=0,\qquad \operatorname{div}\mathbf{H}=0, \tag{56.11}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}=-\frac{\mu}{c}\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t},\qquad \operatorname{rot}\mathbf{H}=\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}. \tag{56.12}$$

按通常方式从这些方程內消去 $\mathbf{E}$(或 $\mathbf{H}$)，我們得到

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{H}=\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\mathbf{E}=-\frac{\mu\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{H}}{\partial t^2},$$

因为 $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{H}=\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{H}-\Delta\mathbf{H}=-\Delta\mathbf{H}$，于是我們得到波方程为

$$\Delta\mathbf{H}-\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{H}}{\partial t^2}=0.$$

由此看出，在均匀的电介质內，电磁波的傳播速度为

$$\frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}. \tag{56.13}$$

在电介质内，电磁能通量密度由和金屬內相同的公式給出:

$$\mathbf{S}=\frac{c}{4\pi}[\mathbf{EH}], \tag{56.14}$$

在計算出 $\operatorname{div}\mathbf{S}$ 后，这很容易证明。利用 (56.4) 和 (56.9)式我們得到

$$\operatorname{div}\mathbf{S}=\frac{c}{4\pi}(\mathbf{H}\operatorname{rot}\mathbf{E}-\mathbf{E}\operatorname{rot}\mathbf{H})=-\frac{1}{4\pi}\left(\mathbf{E}\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}+\mathbf{H}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\right)$$

$$=-\frac{\partial U}{\partial t}, \tag{56.15}$$

这和密度和熵保持不变时电介质的內能微分式

$$dU=\frac{1}{4\pi}(\mathbf{E}\,d\mathbf{D}+\mathbf{H}\,d\mathbf{B})$$

相同。

大家知道，由于相对論不变性的普遍要求，能量通量密度必須和場动量的空間密度相等(除差因子 c^2 外)①。因此后者等于

$$\frac{1}{4\pi c}[\mathbf{EH}]. \tag{56.16}$$

在求交变电磁場內电介质上所受到的力时，特别应該考虑到这种情况。利用应力張量 σ_{ik}，可以算出力 $\mathbf{f}$ (屬于单位体积)为

$$f_i=\frac{\partial\sigma_{ik}}{\partial x_k}.$$

但是这时必須考虑到，σ_{ik} 为动量流密度，它包括物质的和电磁場的动量变化。如果把 $\mathbf{f}$ 理解为只作用在媒质上的力，則从上述的表达式內还必須减去場单位体积的动量变化:

$$f_i=\frac{\partial\sigma_{ik}}{\partial x_k}-\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{4\pi c}[\mathbf{EH}]_i. \tag{56.17}$$

在恒定場內，最后一項等于零，因此以前沒有发生这一問題。

由于場变化很“慢”，对于应力張量，可以应用前面对恒定場所

① 这是四維能量-动量張量对称性的必然結果，参閱“場論”第二版，§31.

得到的表达式。例如，在液体介电媒质內，σ_{ik} 为电部分 (15.9) 和磁部分(34.2)之和。

但是将这些式子对坐标求微分时还必須注意到，代替恒定場(电流不存在)的方程 $\text{rot}\,\mathbf{E}=0$，$\text{rot}\,\mathbf{H}=0$，我們現在要用方程(56.12)，由計算得到下面的結果：

$$\mathbf{f}=-\nabla p_0-\frac{E^2}{8\pi}\nabla\varepsilon+\nabla\left[\rho\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)_T\frac{E^2}{8\pi}\right]-\frac{H^2}{8\pi}\nabla\mu+$$

$$+\nabla\left[\rho\left(\frac{\partial\mu}{\partial\rho}\right)_T\frac{H^2}{8\pi}\right]+\frac{\varepsilon\mu-1}{4\pi c}\frac{\partial}{\partial t}[\mathbf{EH}]. \qquad (56.18)$$

§ 57. 运动电介质的电动力学

媒质的运动引起电場和磁場发生相互作用的現象。对于导体內的这种現象，已在 § 49 內研究过了。現在我們来研究电介质內的这种現象。这时实际上所指的是存在外电場或磁場时在运动电介质內所发生的現象。但是应該着重指出，它們与由物体本身运动产生場的現象，沒有任何共同之处(后者已在 §§ 35 和 50 內研究过了)。

§ 49 內的出发点是从一坐标系变換到另一坐标系时的場变換公式。这时，我們只要知道眞空內的电場强度和磁場强度的普通变換公式就够了，由对这些公式求平均，就直接得到 E 和 B 的变換公式。在电介质內，由于描写电磁場的量数目較多，因而問題也要复杂得多。

在宏观物体的运动中，实际上只涉及比光速小得多的速度。但是为了得到相应的近似变換公式，最簡单的仍是根据适用于一切速度的精确的相对論公式。

大家知道，在眞空內的場的电动力学中，电場强度矢量 e 和磁場强度矢量 h 的分量，实际上是二秩的反对称四維張量 (4-張量)

的分量[①]。既然 **E** 和 **B** 为 **e** 和 **h** 的平均值，因而对四维張量来說，情况也相同。这样一来，我們有一个 4-張量 F_{ik}，其分量为[②]

$$F_{ik}=\begin{pmatrix} 0 & B_z & -B_y & -iE_x \\ -B_z & 0 & B_x & -iE_y \\ B_y & -B_x & 0 & -iE_z \\ iE_x & iE_y & iE_z & 0 \end{pmatrix}. \tag{57.1}$$

利用这个張量，可以把第一对麦克斯韦方程

$$\operatorname{div}\mathbf{B}=0,\quad \operatorname{rot}\mathbf{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \tag{57.2}$$

写成四維形式：

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x_l}+\frac{\partial F_{kl}}{\partial x_i}+\frac{\partial F_{li}}{\partial x_k}=0. \tag{57.3}$$

由此闡明了这些方程的相对論不变性，应着重指出，因为是在精确的微观的麦克斯韦方程內直接用平均值 **E** 和 **B** 代替 **e** 和 **h** 而得到这些方程的，因而十分明显，(57.2) 式也可以应用于运动的物体。

第二对麦克斯韦方程：

$$\operatorname{div}\mathbf{D}=0,\quad \operatorname{rot}\mathbf{H}=\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} \tag{57.4}$$

在运动媒质內也仍然保持相同的形式。这从前一节的討論可明显看出，那里只利用了运动物体和静止物体所具有的共同性质(例如总电荷等于零)。但是这时 **D** 和 **B** 与 **E** 和 **H** 間的关系，不必和静止媒质內的相同。

由于方程(57.4)无論对静止物体或运动物体都是正确的，因而在洛倫茲变换下应保持其形式不变。对于眞空內的場，矢量 **D**

---

① 参閱"場論"第二版，§§22,25。

② 在本节正文內(不包括例題)張量的下角标取的值为 1, 2, 3, 4，这相应于四維坐标：$x_1=x$, $x_2=y$, $x_3=z$, $x_4=ict$。

和 **H** 与 **E** 和 **B** 相等，因而第二对麦克斯韦方程的相对論不变性表现为，利用同一張量 F_{ik} 也可以将它們写成四維形式：$F_{ik}\frac{\partial F_{ik}}{\partial x_k}=$ $=0$①。因此，十分显然，为了保证(57.4)式的相对論不变性，必須使矢量 **D** 和 **H** 的分量实际上和 4-張量的分量一样变换，这張量的构成完全和張量 F_{ik} 相似，我們把这張量表示为 H_{ik}:

$$H_{ik}=\begin{pmatrix} 0 & H_z & -H_y & -iD_x \\ -H_z & 0 & H_x & -iD_y \\ H_y & -H_x & 0 & -iD_z \\ iD_x & iD_y & iD_z & 0 \end{pmatrix} \qquad (57.5)$$

利用它，(57.4)式可以写为

$$\frac{\partial H_{ik}}{\partial x_k}=0. \qquad (57.6)$$

在說明了 **E**、**D**、**H**、**B** 的四維張量的特性以后，我們同时也就知道了从一参考系变换到另一参考系时这些量的变换定律。但是我們感兴趣的与其是这个变换定律，而无宁是运动媒质內这些量的相互关系，它們推广了适用于靜止媒质的关系式：

$$\mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E} \text{ 和 } \mathbf{B}=\mu\mathbf{H}.$$

我們用 u_i 表示媒质速度的 4-矢量；它的分量和三維速度 **v** 的关系为

$$u_{1,2,3}=\frac{v_{x,y,z}}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \qquad u_4=\frac{i}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

我們可以从这 4-矢量和 4-張量 F_{ik} 与 H_{ik} 組成这样的組合，它們在靜止媒质內变为 **E** 和 **D**；而 4-矢量 $F_{ik}u_k$ 和 $H_{ik}u_k$ 就是这样的組合；当 $\mathbf{v}=0$ 时，它們的时間分量变为零，而空間分量分别变为 **E**

① 參閱"場論"第二版，§ 29。

和 $\mathbf{D}$。因此，十分明显，等式 $\mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E}$ 的四維推广为[①]

$$H_{ik}u_k=\varepsilon F_{ik}u_k. \tag{57.7}$$

由类似方式可以证明，关系式 $\mathbf{B}=\mu\mathbf{H}$ 的推广是四維方程:

$$F_{ik}u_l+F_{kl}u_i+F_{li}u_k=\mu(H_{ik}u_l+H_{kl}u_i+H_{li}u_k). \tag{57.8}$$

从四維表达式重新变换到三維形式，可以从这两个方程得到矢量关系式[②]:

$$\begin{aligned}\mathbf{D}+\frac{1}{c}[\mathbf{vH}]&=\varepsilon\left(\mathbf{E}+\frac{1}{c}[\mathbf{vB}]\right),\\ \mathbf{B}+\frac{1}{c}[\mathbf{Ev}]&=\mu\left(\mathbf{H}+\frac{1}{c}[\mathbf{Dv}]\right).\end{aligned} \tag{57.9}$$

这些公式最先由 Γ. 閔可夫斯基(1908)导出，在对速度值尚未作任何假定的意义上，它們是很精确的。假設比值 $\frac{v}{c}$ 很小，除差一次项外，对 $\mathbf{D}$ 和 $\mathbf{B}$ 解这些方程，我們得到

$$\mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E}+\frac{\varepsilon\mu-1}{c}[\mathbf{vH}], \tag{57.10}$$

$$\mathbf{B}=\mu\mathbf{H}+\frac{\varepsilon\mu-1}{c}[\mathbf{Ev}]. \tag{57.11}$$

这些公式和麦克斯韦方程(57.2)与(57.4)一起，构成了运动电介质电动力学的基础。

麦克斯韦方程的边界条件也有一些改变。和前面一样，从方程 $\operatorname{div}\mathbf{D}=0$ 和 $\operatorname{div}\mathbf{B}=0$，得到感应强度的法向分量的連續性条件为

$$D_{n1}=D_{n2},\qquad B_{n1}=B_{n2}. \tag{57.12}$$

从静止参考系 K 变换到与物体的給定面元一起运动的新参考

---

① 应該注意到在写出只包含速度局部值的关系式时，我們已略去了可能存在速度陡度所引起的弱效应(例如迴轉磁效应，参閱 §35)。

② 如果在靜止媒质内，关系式 $\mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E}$ 或 $\mathbf{B}=\mu\mathbf{H}$ 中有一个不成立，則在关系式(57.9)内的相应式子必須用等式两側两个矢量和之間的另一函数关系来代替。

系 K'，可以非常簡单地得到場的切向分量的条件；将物体面元的运动速度（沿法綫 $\mathbf{n}$ 的方向）以 v_n 表示。于是在参考系 K' 內，通常的 $\mathbf{E}'_t$ 和 $\mathbf{H}'_t$ 为連續的条件是正确的。按照相对論的变换公式①，这些要求和矢量的切向分量的下列連續性条件等效：

$$\mathbf{E}+\frac{1}{c}[\mathbf{vB}] \text{ 和 } \mathbf{H}-\frac{1}{c}[\mathbf{vD}].$$

把它們投影到垂直于 $\mathbf{n}$ 的平面上，并考慮到等式(57.12)，我們得到所求的边界条件为

$$\begin{aligned}[][\mathbf{n}, \mathbf{E}_2-\mathbf{E}_1] &= \frac{v_n}{c}(\mathbf{B}_2-\mathbf{B}_1),\\ [\mathbf{n}, \mathbf{H}_2-\mathbf{H}_1] &= -\frac{v_n}{c}(\mathbf{D}_2-\mathbf{D}_1).\end{aligned} \tag{57.13}$$

如果把(57.10)—(57.11)式代入上式，并略去 $\frac{v}{c}$ 的高次項，于是我們得到

$$\begin{aligned}[][\mathbf{n}, \mathbf{E}_2-\mathbf{E}_1] &= \frac{v_n}{c}(\mu_2-\mu_1)\mathbf{H}_t,\\ [\mathbf{n}, \mathbf{H}_2-\mathbf{H}_1] &= -\frac{v_n}{c}(\varepsilon_2-\varepsilon_1)\mathbf{E}_t.\end{aligned} \tag{57.14}$$

在这种近似下，在等式右側可以不必区分分界面两側的 $\mathbf{H}$ 和 $\mathbf{E}$ 值。

如果物体运动时物体表面在垂直于其本身的方向不发生移动（例如旋轉体繞其軸轉动），則 $v_n=0$。只在这种情况下，边界条件(57.13)或(57.14)才变成 $\mathbf{E}_t$ 和 $\mathbf{H}_t$ 为連續的通常条件。

例 題

1. 設介电球在均匀的恒定磁場 $\mathfrak{H}$ 內匀速轉动（在真空內），試求球周圍所产生的电場。

---

① 參閱"場論"第二版 §23。

解. 在計算所产生的电場时，必須把磁場取为和球靜止时的相同，因为考虑磁場变化的反作用将引起更高次的小修正項。球內的磁場为均勻的，并等于

$$\mathbf{H}^{(i)}=\frac{3}{2+\mu}\mathfrak{H}$$

[与(8.2)式比較]。

由于轉动是稳定的，因而所产生的电場恒定不变，和任何恒定电場一样，它具有場势 $\mathbf{E}=-\operatorname{grad}\varphi$。球外的場势滿足方程 $\Delta\varphi^{(e)}=0$，而球內的場势滿足方程：

$$\Delta\varphi^{(i)}=2\frac{\varepsilon\mu-1}{c\varepsilon}\mathbf{\Omega}\mathbf{H}^{(i)},\tag{1}$$

式中 $\mathbf{\Omega}$ 为轉动角速度[在 $\operatorname{div}\mathbf{D}=0$ 內代入 (57.10) 式的 $\mathbf{D}$，并令 $\mathbf{v}=[\mathbf{\Omega r}]$，即得到这个方程]。在球面上，$\mathbf{D}$ 的法向分量的連續性条件为

$$-\varepsilon\frac{\partial\varphi^{(i)}}{\partial r}\bigg|_{r=a}+\frac{\varepsilon\mu-1}{c}a\{\mathbf{\Omega}\mathbf{H}^{(i)}-(\mathbf{\Omega n})(\mathbf{H}^{(i)}\mathbf{n})\}=$$

$$=-\frac{\partial\varphi^{(e)}}{\partial r}\bigg|_{r=a},\tag{2}$$

式中 a 为球的半徑，$\mathbf{n}$ 为 $\mathbf{r}$ 方向的单位矢量。

由于球是对称的，所求的电場决定于两个恒定矢量：Ω 和 $\mathfrak{H}$。从它們的分量，可以构成对 $\mathfrak{H}$ 和 $\mathbf{\Omega}$ 为綫性的标量 $\mathfrak{H}\mathbf{\Omega}$ 和張量

$$\mathfrak{H}_i\Omega_k+\mathfrak{H}_k\Omega_i-\frac{2}{3}\delta_{ik}\mathfrak{H}\mathbf{\Omega}.$$

对角項之和等于零。与此相应，我們求得球外的場势为

$$\varphi^{(e)}=\frac{1}{6}D_{ik}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_k}\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{D_{ik}}{2}\frac{n_in_k}{r^3},\tag{3}$$

式中 D_{ik} 为恒定張量(而且 $D_{ii}=0$)；D_{ik} 为球的四极电矩張量①。$\varphi^{(e)}$ 內沒有常数$/r$ 形式的項，因为这一項給出穿过球面的不为零的总电通量(但球是不帶电的)。球內的場势为

$$\varphi^{(i)}=\frac{r^2}{2a^5}D_{ik}n_in_k+\frac{\varepsilon\mu-1}{3c\varepsilon}\mathbf{\Omega}\mathbf{H}^{(i)}(r^2-a^2).\tag{4}$$

第一項为齐次方程 $\Delta\varphi=0$ 的解，而其中系数的选擇应保证球面上的場势(以及 $\mathbf{E}_t$)为連續的。将(3)和(4)代入(2)內，我們得到

$$D_{ik}=-\frac{a^5}{c}\frac{3(\varepsilon\mu-1)}{(3+2\varepsilon)(2+\mu)}(\mathfrak{H}_i\Omega_k+\mathfrak{H}_k\Omega_i-\frac{2}{3}\delta_{ik}\mathfrak{H}\Omega).\tag{5}$$

---

① 参閱"場論"第二版 §40。

由此可見，在轉动球周圍所产生的电場是四极子性质的，而且球的四极矩由公式(5)① 給出。特别是，如果球繞外場的方向(z 軸)轉动，則 D_{ik} 只有对角分量：

$$D_{zz}=-\frac{a^5}{c}\frac{4(\varepsilon\mu-1)}{(3+2\varepsilon)(2+\mu)}\mathfrak{H}\Omega,\quad D_{xx}=D_{yy}=-\frac{1}{2}D_{zz}.$$

2. 設磁化球繞平行于磁化方向的軸轉动(在眞空內)。試求球周圍所产生的电場②。

解. 球內的磁場是均勻的，而且可以按照方程 $\mathbf{B}^{(i)}+2\mathbf{H}^{(i)}=0$ [比較(8.1)]和 $\mathbf{B}^{(i)}-\mathbf{H}^{(i)}=4\pi\mathbf{M}$ 用恒定磁化强度 $\mathbf{M}$ 来表示，由此得

$$\mathbf{B}^{(i)}=\frac{8\pi\mathbf{M}}{3},\quad \mathbf{H}^{(i)}=-\frac{4\pi\mathbf{M}}{3}.$$

(57.9)式的第二式在現在的情况下不成立(由于对靜止的铁磁体，公式 $\mathbf{B}=$ $=\mu\mathbf{H}$ 不适用)，而从第一式，在球內我們有

$$\mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E}+\frac{\varepsilon}{c}[\mathbf{vB}]-\frac{1}{c}[\mathbf{vH}]=\varepsilon\mathbf{E}+\frac{4\pi(2\varepsilon+1)}{3c}[\mathbf{vM}].$$

在球外所产生的电場势滿足方程 $\Delta\varphi^{(e)}=0$，而在球內，

$$\Delta\varphi^{(i)}=\frac{8\pi(2\varepsilon+1)}{3c\varepsilon}M\Omega.$$

在球面上，D_n 連續的边界条件为

$$-\varepsilon\frac{\partial\varphi^{(i)}}{\partial r}\bigg|_{r=a}+\frac{4\pi(2\varepsilon+1)}{3c}a\Omega M\sin^2\theta=-\frac{\partial\varphi^{(e)}}{\partial r}\bigg|_{r=a},$$

式中 θ 为法綫方向 $\mathbf{n}$ 与 $\mathbf{\Omega}$ 和 $\mathbf{M}$ 方向(z 軸方向)間的夾角。于是求得 $\varphi^{(e)}$ 和 $\varphi^{(i)}$的形式为

$$\varphi^{(e)}=\frac{D_{ik}n_in_k}{2r^3}=\frac{D_{zz}}{4r^3}(3\cos^2\theta-1),$$

$$\varphi^{(i)}=\frac{r^2}{4a^5}D_{zz}(3\cos^2\theta-1)+\frac{4\pi(2\varepsilon+1)}{9c\varepsilon}M\Omega(r^2-a^2),$$

从边界条件得到轉动球的四极电矩的表达式为

$$D_{zz}=-\frac{4(2\varepsilon+1)}{3c(2\varepsilon+3)}a^2\Omega\mathscr{M},\quad D_{xx}=D_{yy}=-\frac{1}{2}D_{zz},$$

---

① 与此类似，在均勻电場內轉动的球周圍产生四极磁場。这时球的四极磁矩由(5)式改变正負号，并分别以 μ, ε, $\mathfrak{E}$ 代换 ε、μ, $\mathfrak{H}$ 而得到的公式求出。

② 如果磁化方向和旋轉軸不相合，則問題的提法完全改变，因为球向周圍空間发射电磁波。

$\mathscr{M}$为球的总磁矩。对金屬球，必須令 $\varepsilon\to\infty$，于是

$$D_{zz}=-\frac{4}{3c}\Omega\mathscr{M}a^2.$$

§ 58. 介电常数的色散

我們現在来研究快交变电磁場这一非常重要的問題，这种場的頻率不必小于建立物质电极化和磁极化的特征頻率。

随时間而变化的电磁場，也必然是随空間而变化的。在頻率为 ω 时空間的周期性由波长决定，波长的数量級为 $\lambda\sim\frac{c}{\omega}$。当頻率再增加，最后 λ 变成与原子綫度 a 同数量級。在这种情况下，場的宏观描写变成不可能。

为此可能发生这样的問題：一般說来，是否存在一个頻率区域，在这区域內，一方面已出現色散現象，另一方面仍然容許宏观的研究。容易看出，这样的区域是必須存在的。在物质內建立电极化或磁极化的最快的机构是电子机构，其弛豫时間为原子时間的数量級 $\frac{a}{v}$，其中 a 为原子的綫度，而 v 为原子內的电子的速度。但是由于 $v\ll c$，因而相应于这时間的波长 $\lambda\sim\frac{ac}{v}$ 仍然大于 a。下面我們假定 $\lambda\gg a$ 的条件满足①。但是应注意到，这条件不是充分的：金屬在低溫时存在一个不能应用宏观理論的頻率区域，尽管不等式 $\frac{c}{\omega}\gg a$ 仍被满足（参閱 § 67）。

下面所叙述的形式理論，在同样程度上适用于金屬和电介质。当頻率相应于原子內电子的运动（光学頻率）或者更高的頻率时，金屬和电介质在性质上的定量差别，实际上已完全消失。

---

① 对小比值 $\frac{a}{\lambda}$ 的以下冪次的項所引起的效应（称为自然旋光性），將在 § 83 內研究。

从 § 56 的討論看出，麦克斯韦方程的形式：

$$\operatorname{div}\mathbf{D}=0,\qquad \operatorname{div}\mathbf{B}=0. \tag{58.1}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t},\qquad \operatorname{rot}\mathbf{H}=\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} \tag{58.2}$$

在任意的交变电磁場內仍然不变。但是这些方程在很大的程度上是沒有內容的，除非其中所包含的諸量 **D**, **B** 和 **E**, **H** 之間已建立了一定的关系。在我們現在所研究的高頻率下，这种关系和适用于靜态情况与色散不存在时应用于交变場的关系，无任何共同之处。

首先这种关系以前所具有的一个基本性质——**D** 和 **B** 单值地依賴于同一时刻的 **E** 和 **H** 值——已遭到破坏，在任意交变場的普遍情况下，某一时刻的 **D** 值和 **B** 值，并不是只由同一时刻的 **E** 值和 **H** 值来决定。相反地可以断言，某一时刻的 **D** 值和 **B** 值，一般說来，依賴于以前时刻的函数 $\mathbf{E}(t)$ 和 $\mathbf{H}(t)$ 的值。这种情况表明，物质电极化或磁极化的建立，"来不及"赶上电磁場的变化（这时引起物质的电性质和磁性质来发生色散現象的頻率，可以完全不相同）。

在这一节內，我們討論 **D** 对 **E** 的依賴关系，至于物质磁性质的色散特征，将在 § 60 內討論。

在 § 6 內，曾按照定义 $\overline{\rho}=-\operatorname{div}\mathbf{P}$ 引进极化矢量 **P**，式中 ρ 为物质內电荷的眞正密度（微观密度）。这等式表明整个物体是电中性的，并由它（和物体外的条件 $\mathbf{P}=0$）可以证明：物体的总电矩等于积分 $\int \mathbf{P}\,dV$。十分显然，这种推論在同样程度上适用于交变場和恒定場。由此可見，在任何交变場內，包括存在色散的情况，矢量 $\mathbf{P}=\frac{1}{4\pi}(\mathbf{D}-\mathbf{E})$ 都保持着为物质单位体积电矩的物理意义。

在快交变場內，实际上常常遇到的是較弱的場强。因此，可以

假定 $\mathbf{D}$ 和 $\mathbf{E}$ 的关系是綫性的[①]。$\mathbf{D}(t)$ 和以前时刻的函数 $\mathbf{E}(t)$ 的值間的最普遍的綫性关系可以写成积分形式:

$$\mathbf{D}(t)=\mathbf{E}(t)+\int_0^{\infty} f(\tau)\mathbf{E}(t-\tau)\,d\tau \tag{58.3}$$

(由于下面所闡明的原因,可以方便地分出 $\mathbf{E}(t)$ 項)。式中 $f(\tau)$ 为时間的函数,与媒质的性质有关。按照与静电公式 $\mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E}$ 的类似性,我們把关系式(58.3)写成算符形式:

$$\mathbf{D}=\hat{\varepsilon}\mathbf{E},$$

式中 $\hat{\varepsilon}$ 为綫性积分算符,它的作用由(58.3)式得出。

任何交变場都可以用傅立叶展开式化成单色分量的集合,其中各个分量对时間的关系由因子 $e^{-i\omega t}$ 給出。对于这种場,$\mathbf{D}$ 和 $\mathbf{E}$ 的关系式(58.3)变为下列形式:

$$\mathbf{D}=\varepsilon(\omega)\mathbf{E}, \tag{58.4}$$

式中的函数 $\varepsilon(\omega)$ 定义为

$$\varepsilon(\omega)=1+\int_0^{\infty} f(\tau)e^{i\omega t}\,d\tau. \tag{58.5}$$

由此可見,对于周期場,我們可以引进介电常数作为 $\mathbf{D}$ 与 $\mathbf{E}$ 間的比例系数,但是,这个系数不但与媒质的性质有关,而且也与場的频率有关。ε 对頻率的依賴关系,称为它的色散定律。

函数 $\varepsilon(\omega)$ 一般說来是复数,我們把它的实数部分和虛数部分表示为 ε' 和 ε'':

$$\varepsilon(\omega)=\varepsilon'(\omega)+i\varepsilon''(\omega). \tag{58.6}$$

从定义(58.5)直接看出,

① 这里我們理解 $\mathbf{D}$ 只綫性地依賴于 $\mathbf{E}$,而不依賴于 $\mathbf{H}$。在恒定場內,$\mathbf{D}$ 对 $\mathbf{H}$ 的綫性关系为对时間变号必須保持不变的要求所排斥。在交变場内,这一条件不存在,因而在物质的一定对称类型下,$\mathbf{D}$ 对 $\mathbf{H}$ 的綫性关系是可能的,但是它是上一底注內所提到的与 $\frac{a}{\lambda}$ 同数量級的小效应。

$$\varepsilon(-\omega)=\varepsilon^*(\omega). \tag{58.7}$$

在这式子内分开实数部分和虚数部分，我們得到

$$\varepsilon'(-\omega)=\varepsilon'(\omega),\quad \varepsilon''(-\omega)=-\varepsilon''(\omega). \tag{58.8}$$

由此可見，ε' 是頻率的偶函数，而 ε'' 是頻率的奇函数。

当頻率很小时(与色散的起始边界比較)，可以把函数 $\varepsilon(\omega)$ 展开为 ω 的冪級数。这时偶函数 $\varepsilon'(\omega)$ 的展开式內只包含偶次冪的項，而奇函数 $\varepsilon''(\omega)$ 的展开式內只包含奇次冪的項。在 $\omega\to 0$ 的极限情况下，在电介质內，函数 $\varepsilon(\omega)$ 当然趋近于静电介电常数(我們把它表示为 ε_0)。因此，在电介质內，$\varepsilon'(\omega)$ 的展开式从常数項 ε_0 开始，而 $\varepsilon''(\omega)$ 的展开式，一般說来从与 ω 成比例的項开始。

当頻率很小时，也可以对金屬来研究函数 $\varepsilon(\omega)$，只要我們这样来定义它：在极限 $\omega\to 0$ 时方程

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}=\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}$$

变成导体內的恒定場方程：

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}=\frac{4\pi}{c}\sigma\mathbf{E}.$$

比較这两个方程，我們看到，当 $\omega\to 0$ 时，导数 $\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}$ 必須变成 $4\pi\sigma\mathbf{E}$。但是在周期場內，$\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}=-i\omega\varepsilon\mathbf{E}$，于是我們得到低頻时的 $\varepsilon(\omega)$ 的极限表达式为

$$\varepsilon(\omega)=i\frac{4\pi\sigma}{\omega}. \tag{58.9}$$

由此可見，在导体內，函数 $\varepsilon(\omega)$ 的展开式从与 $\frac{1}{\omega}$ 成比例的虛数項开始，这一項可以用相对于恒定电流的普通电导率 σ 来表示[1]。$\varepsilon(\omega)$ 的展开式以下一項为实常数，但是这个常数在金屬內

[1] 有时可以将函数 $\varepsilon(\omega)$ 的虛数部分以(58.9)式表示(对各种頻率而言)，这归結为引进新函数 $\sigma(\omega)$ 以代替 $\varepsilon''(\omega)$；但这种变换隔割掉了这函数的物理意义。

不具有像电介质内①那样的静电值的意义。此外，还必須再指出，如果电磁波場的空間不均匀性效应比它的时間周期性效应出現得要早，則展开式的这一項沒有任何普遍的意义。

在超导体內，常常存在由于磁場“透入深度”小所引起的显著不均匀性。但是現在还不清楚：介电常数 $\varepsilon(\omega)$的概念一般說来对超导体是否还有意义。

§ 59. 很高频率时的介电常数

在$\omega\to\infty$的极限下，函数 $\varepsilon(\omega)$ 趋近于1。这可从簡单的物理設想明显看出：当場的变化非常快时，引起电場 $\mathbf{E}$ 与感应强度 $\mathbf{D}$ 发生差别的极化过程，一般說来来不及发生。

我們可以求出高频时适用于任何物体(不論是金屬或电介质)的函数 $\varepsilon(\omega)$ 的极限形式。即是場频率必須大于物质原子內全部电子或至少大多数电子运动的频率。当这条件滿足时，計算物质的极化可以把电子視为是自由的，从而略去它們彼此之間以及与原子核之間的相互作用。

原子內电子的运动速度 v 小于光的速度，因此电子在波的一个周期內所通过的距离$\frac{v}{\omega}$小于波长$\frac{c}{\omega}$。由于这一点，在求电子在电磁波場內所得到的速度时，可以假定电磁波場是均匀的电子的运动方程为

$$m\frac{dv'}{dt}=e\mathbf{E}=e\mathbf{E}_0e^{-i\omega t},$$

式中 e 和 m 分别为电子的电荷和质量；由此得到 $\mathbf{v}'=\frac{ie\mathbf{E}}{m\omega}$。电子在場的作用下发生的位移 $\mathbf{r}$ 与 $\mathbf{v}'$ 的关系为 $\dot{\mathbf{r}}=\mathbf{v}'$；因而 $\mathbf{r}=-\frac{e\mathbf{E}}{m\omega^2}$。

① 为了避免引起誤会，我們注意到，与§56比較，符号有一些改变。对不良导体，在(56.10)式內 $\varepsilon(\omega)$是$\frac{4\pi i\sigma}{\omega}+\varepsilon$ 之和。

物质的极化强度 $\mathbf{P}$ 为物质单位体积的偶极矩。对全部电子求和，我們得到

$$\mathbf{P}=\sum e\mathbf{r}=-\frac{e^2}{m\omega^2}N\mathbf{E},$$

式中 N 为物质单位体积内全部原子内的电子数。另一方面，根据电感应强度的定义，$\mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E}=\mathbf{E}+4\pi\mathbf{P}$。因此，最后得到下面的公式.

$$\varepsilon(\omega)=1-\frac{4\pi Ne^2}{m\omega^2}. \tag{59. 1}$$

这公式的应用区域，实际上从最輕元素的远紫外区或較重元素的倫琴射綫頻率开始①。

§60. 导磁率的色散

和介电常数 $\varepsilon(\omega)$ 不同，导磁率 $\mu(\omega)$ 当频率增加时很快失去物理意义。

为了闡明这个問题，我們来分析一下，在交变場内，量 $\mathbf{M}=\frac{(\mathbf{B}-\mathbf{H})}{4\pi}$ 作为单位体积的磁矩的物理意义，究竟維持到何种程度。按照定义，物体的磁矩为积分:

$$\frac{1}{2c}\int[\mathbf{r}\cdot\overline{\rho\mathbf{v}}]dV. \tag{60. 1}$$

微观电流密度的平均值与平均場的关系为(56. 7)式:

$$\operatorname{rot}\mathbf{B}=\frac{4\pi}{c}\overline{\rho\mathbf{v}}+\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}. \tag{60. 2}$$

从这个式子減去方程:

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}=\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t},$$

我們得到

① 为保持 $\varepsilon(\omega)$ 在麦克斯韦方程内的本来意义，頻率还必須滿足条件: $\omega\ll\frac{c}{a}$。但是我們以后将看到(§99)，在高頻时也可以对(59.1)式添上一定的物理意义。

$$\overline{\rho \mathbf{v}} = c \operatorname{rot} \mathbf{M} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}. \tag{60.3}$$

而且如 § 27 內所示，只在条件 $\overline{\rho \mathbf{v}} = c \operatorname{rot} \mathbf{M}$ 和在物体外 $\mathbf{M}=0$ 时，积分(60.1)才能化成 $\int \mathbf{M} dV$ 的形式。

由此可見，量 $\mathbf{M}$ 以及磁化率的物理意义与略去(60.3)式中的項 $\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}$ 的可能性有关。現在我們来看一看，容許这种忽略的条件可以在何种程度上得到滿足。

在給定的頻率下，測量磁化率最合适的条件，是要求物体的綫度尽可能地小（使 $\operatorname{rot} \mathbf{M}$ 內的空間导数增大）和电場尽可能地弱（使$\mathbf{P}$减小）。电磁波場不滿足后一条件，因为其中 $E \sim H$。因此，例如我們来研究綫圈內的交变磁場，并且把所研究的物体放在綫圈的軸上。电場的产生只是由于交变磁場的感应作用。由計算方程

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

的两側，可以得到物体內电場强度的数量級，由此得到 $\frac{E}{l} \sim \frac{\omega H}{c}$ 或 $E \sim \frac{\omega l}{c} H$，式中 l 为物体的綫度。令 $\varepsilon \sim 1$，我們得到

$$\frac{\partial P}{\partial t} \sim \omega E \sim \frac{\omega^2 l}{c} H.$$

对于磁矩 $\mathbf{M} = \chi \mathbf{H}$ 的空間导数，我們得到

$$c \operatorname{rot} \mathbf{M} \sim \frac{c}{l} \chi H.$$

比較这两个式子，我們发現，如果

$$l^2 \ll \chi \frac{c^2}{\omega^2}, \tag{60.4}$$

則第一項小于第二項。

十分显然，只有这不等式容許物体的宏观綫度（至少如此），也

即是說，只有这个不等式和不等式 $l \gg a$ 不相矛盾(其中 a 为原子的綫度)，磁化率的概念才有意义。在光学频率区域內，这条件显然已被破坏。实际上，在这些频率下，磁化率常常为 $\sim\frac{v^2}{c^2}$①，式中 v 为原子内电子的速度，而光学频率为 $\omega\sim\frac{v}{a}$，因此不等式(60.4)的右侧为 $\sim a^2$。

由此可見，从光学频率区域开始，采用磁化率的概念显然已沒有意义，而且在研究这些現象时，必須令 $\mu=1$。在这区域內，計及 **B** 与 **H** 的差别，显然已过于精确。实际上，在比光学频率低得多的频率下，对于絕大多数的現象，計及 μ 与 1 的差别就已經超过了精密度。

§61. 色散媒质內的場能

能通量密度公式：

$$\mathbf{S}=\frac{c}{4\pi}[\mathbf{EH}] \tag{61.1}$$

在任何交变电磁場內都仍然正确。其中也包括存在色散的情况。这从 § 29 末所提到的理由可以看出：由于 **E** 和 **H** 的切向分量是連續的，因而从 **S** 的法向分量在物体的边界上为連續的条件即可得到(61.1)式，又从这公式在物体外的眞空內也是正确的，也可得到它。

物体单位体积內 1 秒內的能量变化为 div **S**，利用麦克斯韦方程，这个表达式变成

$$-\operatorname{div}\mathbf{S}=\frac{1}{4\pi}\left(\mathbf{E}\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}+\mathbf{H}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\right) \tag{61.2}$$

[参閱(56.15)式]。在不存在色散的介电媒质內，当 ε 和 μ 为实常数时，可以把这个量視为是电磁能的变化：

① 任何順磁或铁磁过程的弛豫时間，显然都大于光学周期。

$$U=\frac{1}{8\pi}(\varepsilon\mathbf{E}^2+\mu\mathbf{H}^2),\tag{61.3}$$

这个式子具有精确的热力学意义：它是密度和熵保持不变、場存在和場不存在时每单位体积的內能之差。

如果存在色散現象，則不可能有这样簡单的解釋。而且在任意色散的普遍情况下，电磁能不能合理地定义为热力学量。这是因为色散的存在，一般說来表明同时存在着能量的耗散：色散的媒质同时是吸收媒质。

为了求出这种耗散，我們来研究单色电磁場。將(61.2)式对时間求平均，我們得到稳定的能量改变，这也就是媒质单位体积內一秒內所放出的平均热量 Q。

因为(61.2)式是場的二次式，因而在計算它时必須将全部的量写成实数形式。如果把 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{H}$ 理解为复数量(这对单色場是方便的)，則在(61.2)式內的 $\mathbf{E}$ 和 $\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}$，必須分別代以下列表达式：

$$\frac{1}{2}(\mathbf{E}+\mathbf{E}^*)\quad 和\quad \frac{1}{2}(-i\omega\varepsilon\mathbf{E}+i\omega\varepsilon^*\mathbf{E}^*),$$

并且对 $\mathbf{H}$ 和 $\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$ 代以类似的式子。在对时間求平均时，含有因子 $e^{\mp 2i\omega t}$ 的乘积 $\mathbf{EE}$ 和 $\mathbf{E}^*\mathbf{E}^*$ 变为零；于是剩下

$$Q=\frac{i\omega}{16\pi}\{(\varepsilon^*-\varepsilon)\mathbf{EE}^*+(\mu^*-\mu)\mathbf{HH}^*\}=$$

$$=\frac{\omega}{8\pi}(\varepsilon''|\mathbf{E}|^2+\mu''|\mathbf{H}|^2).$$

这表达式也可以写为

$$Q=\frac{\omega}{4\pi}(\varepsilon''\overline{\mathbf{E}^2}+\mu''\overline{\mathbf{H}^2}),\tag{61.4}$$

式中 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{H}$ 为实数場强，而短横表示对时間求平均。

这个重要的公式表明，能量的吸收(耗散)由 ε 和 μ 的虛数部

分决定；(61.4)式内的两項，分别称为电損失和磁損失。由于熵增加定律，这些損失有完全确定的正負号：能量耗散伴随着热量的放出，也即是总是 $Q>0$。因此，从(61.4)得出，对任何物质和任何頻率①，ε 和 μ 的虚数部分永远是正的：

$$\varepsilon''>0, \qquad \mu''>0 \tag{61.5}$$

ε 和 μ 的实数部分的正負号(当 $\omega\neq0$)不受任何物理条件的限制，于是 ε' 和 μ' 可以是正的，也可以是負的。

在实际的物质內，一切非稳定过程在某种程度上总是热力学上不可逆的。因此，在交变电磁場內，常常在某种程度上(虽然很小)存在着电損失和磁損失。換句話說，对任何不为零的頻率值，函数 $\varepsilon''(\omega)$ 和 $\mu''(\omega)$ 都不会严格地为零。在下一节內我們将看到，这种論断具有重大的原則意义，虽然这絲毫也不排斥存在着損失变为很小的頻率区域的可能性。

ε'' 和 μ'' 很小(与 ε' 和 μ' 比較)的頻率区域称为物质的透明区域。在这些区域內，忽略吸收之后，我們可以引进电磁場內物体的內能这一概念，它的意义和恒定場时相同。

要求出这个量，只研究純粹的单色場是不够的，因为由于这种場的严格的周期性，不会使电磁能量稳定地儲存起来。所以我們必須研究一种場，它代表頻率在某一平均頻率 ω_0 附近的狹小間隔內的单色分量的組合。这种場的場强可以写为

$$\mathbf{E}=\mathbf{E}_0(t)e^{-i\omega_0 t}, \quad \mathbf{H}=\mathbf{H}_0(t)e^{-i\omega_0 t}, \tag{61.6}$$

式中 $\mathbf{E}_0(t)$，$\mathbf{H}_0(t)$ 为时間的緩变化函数(与因子 $e^{-i\omega_0 t}$ 比較)。

---

① 严格說来，这种說法是对热力学平衡态下(不存在交变場)的物体而言，这也即是我們处处所假定的情况。如果物体不在热平衡态下，則在原理上 Q 也可以为負值。热力学第二定律只要求在交变电磁場作用下和在与場的存在无关的非热力学平衡态下总熵增加。这种物体的一个可能的例子是全部原子可用人工方法(即不在自发的热激发作用下)变为激发态的物质。

必須把这些式子的实数部分代入(61.2)式的右側，然后我們再对一个周期 $2\pi/\omega_0$ 的时間求平均，这周期小于因子 $\mathbf{E}_0$ 和 $\mathbf{H}_0$ 变化的时間。

(61.2)式内的第一項在 $\mathbf{E}$ 用复数表示后变为

$$\frac{1}{4\pi}\,\frac{\mathbf{E}+\mathbf{E}^*}{2}\,\frac{\dot{\mathbf{D}}+\dot{\mathbf{D}}^*}{2}$$

(第二項有类似的式子)。乘积 $\mathbf{E}\dot{\mathbf{D}}$ 和 $\mathbf{E}^*\dot{\mathbf{D}}^*$ 在对时間求平均后变为零，因而一般不必考虑它們。这样一来，只剩下

$$\frac{1}{16\pi}\left(\mathbf{E}\frac{\partial\mathbf{D}^*}{\partial t}+\mathbf{E}^*\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}\right). \tag{61.7}$$

把导数 $\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}$ 写成 $\hat{f}\mathbf{E}$，式中 $\hat{f}$ 表示算符:

$$\hat{f}=\frac{\partial}{\partial t}\hat{\varepsilon},$$

我們来研究这算符作用在函数(61.6)上会得到什么結果。如果 $\mathbf{E}_0$ 是常数，則我們簡单地得到

$$\hat{f}\mathbf{E}=f(\omega)\mathbf{E},$$

式中

$$f(\omega)=-i\omega\varepsilon(\omega).$$

我們把函数 $\mathbf{E}_0(t)$ 展开为傅立叶分量 $\mathbf{E}_{0\alpha}e^{-i\alpha t}$ 的級数，其中 $\mathbf{E}_{0\alpha}$ 为常数 函数 $\mathbf{E}_0(t)$ 是緩变化的表明，在这展开式内只包含 $\alpha\ll\omega_0$ 的分量。注意到这一点，我們可以写为

$$\hat{f}\mathbf{E}_{0\alpha}e^{-i(\omega_0+\alpha)t}=f(\alpha+\omega_0)\mathbf{E}_{0\alpha}e^{-i(\omega_0+\alpha)t}\cong$$

$$\cong f(\omega_0)\mathbf{E}_{0\alpha}e^{-i(\omega_0+\alpha)t}+\alpha\frac{df(\omega_0)}{d\omega_0}\mathbf{E}_{0\alpha}e^{-i(\omega_0+\alpha)t}.$$

現在反过来对傅立叶分量求和，我們得到

$$\hat{f}\mathbf{E}_0(t)e^{-i\omega_0 t}=f(\omega_0)\mathbf{E}_0e^{-i\omega_0 t}+i\frac{df(\omega_0)}{d\omega_0}\,\frac{\partial\mathbf{E}_0}{\partial t}e^{-i\omega_0 t}.$$

以后略去 ω_0 上的下角标 0，于是我們得到

$$\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}=-i\omega\varepsilon(\omega)\mathbf{E}+\frac{d(\omega\varepsilon)}{d\omega}\,\frac{\partial\mathbf{E}_0}{\partial t}e^{-i\omega t}. \tag{61.8}$$

把这式子代入(61.7)内，并記住我們已略去函数$\varepsilon(\omega)$的虚数部分，于是我們得到

$$\frac{1}{16\pi}\frac{d(\omega\varepsilon)}{d\omega}\left(\mathbf{E}_0^*\frac{\partial\mathbf{E}_0}{\partial t}+\mathbf{E}_0\frac{\partial\mathbf{E}_0^*}{\partial t}\right)=\frac{1}{16\pi}\frac{d(\omega\varepsilon)}{d\omega}\frac{d}{dt}(\mathbf{E}\mathbf{E}^*)$$

(乘积 $\mathbf{E}_0\mathbf{E}_0^*$ 和 $\mathbf{E}\mathbf{E}^*$ 相等)。加上包含磁場的类似表达式，我們就得到結論：媒质单位体积內能量的稳定变化率为导数 $\frac{d\bar{U}}{dt}$，其中

$$\bar{U}=\frac{1}{16\pi}\left[\frac{d(\omega\varepsilon)}{d\omega}\mathbf{E}\mathbf{E}^*+\frac{d(\omega\mu)}{d\omega}\mathbf{H}\mathbf{H}^*\right]. \tag{61.9}$$

利用实数場强 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{H}$，这表达式可以写为

$$\bar{U}=\frac{1}{8\pi}\left[\frac{d(\omega\varepsilon)}{d\omega}\overline{E^2}+\frac{d(\omega\mu)}{d\omega}\overline{\mathbf{H}^2}\right]. \tag{61.10}$$

这也就是所要求得的結果：$\bar{U}$ 是透明媒质单位体积中內能的电磁能部分的平均值。在色散不存在时，ε 和 μ 为常数，而(61.10)式变成(61.3)式的平均值，这正是应得到的結果。

如果从外部供应到物体上的电磁能被截断，则虽然很微小但实际上常常存在的吸收，最后把全部的能量 $\bar{U}$ 轉变成热。因为按照熵增加原理，这些热量必須放出而不是被吸收掉，因而必須 $\bar{U}>0$。根据(61.9)式，为此必須满足不等式：

$$\frac{d(\omega\varepsilon)}{d\omega}>0,\ \frac{d(\omega\mu)}{d\omega}>0.$$

实际上，由于一些更强的不等式在透明区域內常常为函数 $\varepsilon(\omega)$ 和 $\mu(\omega)$ 所满足，因而上述条件自动地满足(参閱 § 64)①。

确定交变电磁場內的物质所受的力有平均(对时間而言)应力張量，而求出这張量的問題，具有重大的意义。这个問題无論对非吸收媒质或吸收媒质，都有意义，这与內能的問題不同，后者只有

① 取不等式(64.1)和(64.2)的半和，我們发現导数 $d(\omega\varepsilon)/d\omega$ 不但是正的，而且甚至大于1。

在略去吸收后才能够表述出来。但是到目前为止，我們还沒有得到相应的表达式。

§ 62. $\varepsilon(\omega)$ 的实数部分和虚数部分的关系

(58.3)式內的函数 $f(\tau)$，当宗量 τ 为任何值时（其中也包括 $\tau=0$①）都是有限的。对电介质而言，$\tau\to\infty$ 时，这函数趋近于零。这种情况所表明的簡单事实是，任何时刻的 $\mathbf{D}(t)$值都不会受到以前时刻的 $\mathbf{E}(t)$ 值的显著影响。奠定积分关系 (58.3) 式的物理机构是建立电极化的过程。因此，函数 $f(\tau)$ 显著不为零的数值区間，为表征这种过程速度的弛豫时間的数量級。

以上所述也适用于金屬，这时唯一的差别是：当 $\tau\to\infty$ 时，趋近于零的不是函数 $f(\tau)$ 本身，而是差值 $f(\tau)-4\pi\sigma$。这种差别是由于稳定的傳导电流的流过，虽然并不会使金屬的物理状态有任何实际的改变，但在我們的方程內，它在形式上表明出現感应强度 $\mathbf{D}$，使$\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}=\frac{4\pi}{c}\sigma\mathbf{E}$，或者

$$\mathbf{D}(t)=\int_{-\infty}^{t}4\pi\sigma\mathbf{E}(\tau)d\tau=4\pi\sigma\int_{0}^{\infty}\mathbf{E}(t-\tau)d\tau.$$

函数 $\varepsilon(\omega)$ 我們定义为

$$\varepsilon(\omega)=1+\int_{0}^{\infty}e^{i\omega\tau}f(\tau)d\tau. \tag{62.1}$$

利用复变数函数理論的数学工具，我們可以导出这个函数的某些更普遍的关系式。为此，我們把 ω 視为复变数 $(\omega=\omega'+i\omega'')$，并研究函数 $\varepsilon(\omega)$ 在这个变数的上半平面內的性质。从定义 (62.1) 和从上面所指出的函数 $f(\tau)$ 的性质得出，在全部上半平面內$\varepsilon(\omega)$

① 即是为了这一目的，在积分关系式(58.3)內分出了$\mathbf{E}(t)$项；相反地，当 $\tau=0$ 时，函数 $f(\tau)$具有 δ 函数型的奇点。

是单值函数，在任何一点上都不会变成无穷大，也即是說沒有任何奇点。实际上，当$\omega''>0$时，(62.1)式的被积式內有一指数式衰减因子 $e^{-\omega''\tau}$，同时因为函数 $f(\tau)$ 在全部积分区域內是有限的，因而积分是收斂的。只除了坐标原点可能之外(对金屬而言，$\varepsilon(\omega)$ 在这一点处有一个极点)，函数 $\varepsilon(\omega)$ 在实軸($\omega''=0$)上也无奇点①。

有趣的是注意到，函数$\varepsilon(\omega)$在上半平面內不存在奇点的推論，从物理学观点看来，是因果律的必然結果。由于因果律，(58.3)式內的积分只对 t 以前的时間积分，因而在(62.1)式內，积分区域也从0扩展至∞(而不是从$-\infty$至$+\infty$)。

其次从(62.1)的定义可知，

$$\varepsilon(-\omega^*)=\varepsilon^*(\omega), \tag{62.2}$$

这推广了只适用于ω的实数值的关系式(58.7)。特別是，对于ω的純虛数值，我們得到 $\varepsilon(i\omega'')=\varepsilon^*(i\omega'')$，也即是在虛轴上函数$\varepsilon(\omega)$ 为实数:

$$\text{当 } \omega=i\omega'' \text{ 时，} \operatorname{Im}\varepsilon=0. \tag{62.3}$$

应着重指出，(62.2)的性质所表示的事实是：算符关系$\mathbf{D}=\hat{\varepsilon}\mathbf{E}$必須保证 $\mathbf{E}$ 为实数时 $\mathbf{D}$ 也为实数。如果函数 $\mathbf{E}(t)$ 由实数表达式

$$\mathbf{E}=\mathbf{E}_0e^{-i\omega t}+\mathbf{E}_0^*e^{i\omega t} \tag{62.4}$$

得出，则把算符 $\hat{\varepsilon}$ 作用到右側的每一項上，我們得到

$$\mathbf{D}=\varepsilon(\omega)\mathbf{E}_0e^{-i\omega t}+\varepsilon(-\omega^*)\mathbf{E}_0^*e^{i\omega^* t};$$

这个量为实数的条件和(62.2)相合。

---

① 在下半平面內，定义(62.1)不能应用，因为积分是发散的。因此，函数 $\varepsilon(\omega)$ 在下半平面內只能定义为上半平面內(62.1)式的解析开拓。在这区域內，一般說来，函数 $\varepsilon(\omega)$有奇点。

在上半平面內，函数 $\varepsilon(\omega)$不但具有形式上的数学意义，而且也具有物理意义：由它可求出振幅增加($e^{\omega''t}$)的場的 $\mathbf{D}$ 与 $\mathbf{E}$ 間的关系。但在下半平面內，不可能有这样的物理解釋，因为衰減(随 $e^{-|\omega''|t}$)場的存在假定了当 $t\to-\infty$时，場变为无穷大。

根据 § 61 所得到的結果，$\varepsilon(\omega)$ 的虚数部分对正的实数值 $\omega=\omega'$，也即是在实軸的右側是正的。因为按照(62.2)，$\operatorname{Im}\varepsilon(-\omega')=-\operatorname{Im}\varepsilon(\omega')$，因而在这軸的左側，$\varepsilon(\omega)$ 的虚数部分是負的。由此可見，

$$\left.\begin{array}{l}\text{当 } \omega=\omega'>0 \text{ 时，} \operatorname{Im}\varepsilon>0,\\ \text{当 } \omega=\omega'<0 \text{ 时，} \operatorname{Im}\varepsilon<0.\end{array}\right\} \tag{62.5}$$

在 $\omega=0$ 的点处，函数 $\operatorname{Im}\varepsilon$ 改变正負号，通过零(对电介质)，或者通过无穷大(对金屬)。这是 $\operatorname{Im}\varepsilon(\omega)$ 在实軸上可以变为零的唯一点。

当 ω 在上半平面內沿任何路綫趋近于无穷大时，函数 $\varepsilon(\omega)$ 趋近于 1。在 § 59 內我們曾經对 ω 沿实軸趋于无穷大指出过这种情况。在普遍情况下，从(62.1)式看出：如果 $\omega\to\infty$，使 $\omega''\to\infty$，則由于在被积式內有因子 $e^{-\tau\omega''}$，因而(62.1)式的积分变为零；如果 ω'' 保持有限，而 $|\omega'|\to\infty$，則由于存在振蕩因子 $e^{i\omega'\tau}$，积分变为零。

利用上面所举出的函数 $\varepsilon(\omega)$ 的性质，可以证明下列定理：除了虚軸上的点外，函数 $\varepsilon(\omega)$ 在上半平面內任何有限的点处，都不会取实数值；在虚軸上，$\varepsilon(\omega)$ 从 $\omega=i0$ 时的 $\varepsilon_0>1$ (对电介质) 或 $+\infty$(对金屬) 单調地減小到 $\omega=i\infty$ 时等于 1，特別是由此得出，函数 $\varepsilon(\omega)$ 在上半平面內无零点。

为了证明起見[①]，我們利用复变数函数理論中的熟知定理，按照这定理，积分

$$\frac{1}{2\pi i}\int\frac{d\varepsilon(\omega)}{d\omega}\,\frac{d\omega}{\varepsilon(\omega)-a} \tag{62.6}$$

在对閉合綫路 C 进行积分后等于函数 $\varepsilon(\omega)-a$ 在 C 所圍成的区域內的零点数和极点数之差。設 a 为实数，而选取綫路 C 由实軸和

① 以下的证明是由 N. N. 梅依曼提出的。

由上半平面內的无穷大半圓所組成(图 29)。首先我們假定，函数 $\varepsilon(\omega)$ 系对电介质而言，于是 $\omega=0$ 的点不是奇点。因为在上半平

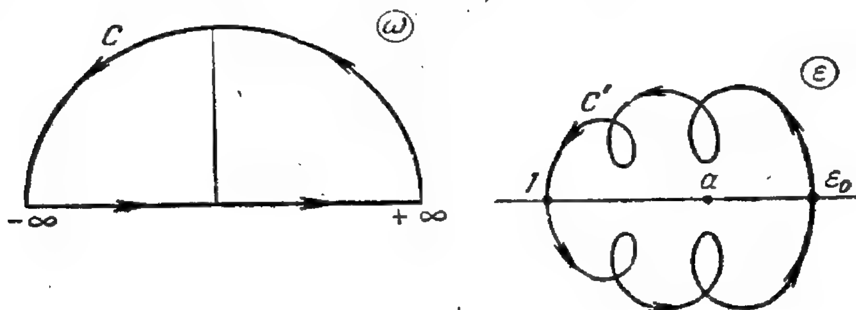


图 29

面內，函数 $\varepsilon(\omega)$、因而 $\varepsilon-a$ 无极点，因此上面指出的积分只給出差值 $\varepsilon(\omega)-a$ 的零点数，也即是函数 $\varepsilon(\omega)$ 取实数值 a 的点数目。为了計算出积分，我們把它写为

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C'}\frac{d\varepsilon}{\varepsilon-a},$$

而且这积分对复变数 ε 的平面內的綫路 C' 进行，而綫路 C' 为 ω 平面內的綫路 C 的映像。整个无穷远半圓映像于点 $\varepsilon=1$ 处，而坐标原点 $\omega=0$ 映像于另一个也是实数的点 $\varepsilon=\varepsilon_0>1$ 处(ε 为靜电值)。ω 右側和左側的实半軸，在 ε 平面內映像成某些复杂的(一般說来自交的)曲綫，这些曲綫分別全部在上半平面和下半平面內。重要的是，这些曲綫不会与横坐标軸相交(除了 $\varepsilon=1$ 和 $\varepsilon=\varepsilon_0$ 的点外)，因为 ω 取任何有限的实数值时(除 $\omega=0$ 外)，ε 都不会取实值。由于綫路C'的这种性质，复数宗量 $\varepsilon-a$ 繞 C 一周的总变化或等于2π(如果 a 在 1 与ε_0之間，如图 29 所示)，或者等于零(如果 a 在这間隔之外)，而与綫路的自交次数无关。由此得到，当 $1<a<\varepsilon_0$ 时，(62. 6)式等于 1，而 a 取其他任何值时等于零。

于是我們得到結論，在 ω 的上半平面內，函数 $\varepsilon(\omega)$ 只一次取上述間隔內 a 的一切实数值，而沒有一次取这間隔外的值。由此

首先可以作出結論，在函数 $\varepsilon(\omega)$ 为实数的虚軸上，函数 $\varepsilon(\omega)$ 不可能有极大值，也不可能有极小值，因为在相反的情况下，它至少有两次取某一些值。因此，在虚軸上函数 $\varepsilon(\omega)$ 单調地变化．在这軸而且只在这軸上，它一次取从 ε_0 到 1 的一切实值。

对金属而言[这时$\varepsilon(\omega)$有一极点在$\omega=0$的点处]，上述的证明只須作一点改变，即沿实軸运动时(在ω平面內)，必須从上面沿一无穷小半圓繞过坐标原点。图 29 上綫路 C' 的变化这时可設想为 ε_0 向无穷远处移动的結果。在 ω 的虚軸上，函数 $\varepsilon(\omega)$ 在这种情况下单調地从 $+\infty$ 减小到 1。

其次，我們来导出联系函数 $\varepsilon(\omega)$ 的虚数部分和实数部分的公式。为此，我們选擇某一实数值 $\omega=\omega_0$，幷对图 30 上所示的迴路求出函数$\dfrac{\varepsilon-1}{\omega-\omega_0}$的积分。这迴路通过全部的实軸，幷从上面繞过点 $\omega=\omega_0>0$ 以及点 $\omega=0$，如果后者(对金属而言)是函数 $\varepsilon(\omega)$ 的极点的話。迴路和无穷大的半圓相接。在无穷远处，$\varepsilon\to1$，因而函数$\dfrac{\varepsilon-1}{\omega-\omega_0}$趋近于零要比$\dfrac{1}{\omega}$快。所以积分

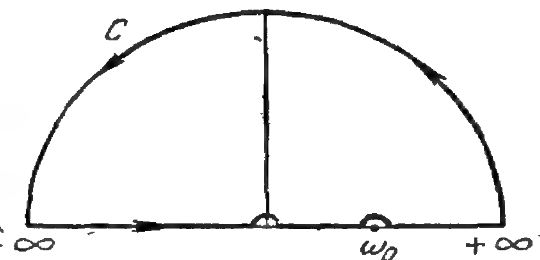


图 30

$$\int_C \frac{\varepsilon-1}{\omega-\omega_0}d\omega$$

是收斂的；因为 $\varepsilon(\omega)$ 在上半平面內无奇点，而点 $\omega=\omega_0$ 不包含在积分区域內，因而在迴路 C 內的全部区域內，函数$\dfrac{\varepsilon-1}{\omega-\omega_0}$是解析的，因而上面写出的积分等于零。

对无穷远半圓的积分自动地变为零。我們沿无穷小半圓(半徑 $\rho\to0$)繞过 ω_0 点；沿順时針方向繞过时对积分的貢献等于

$-i\pi[\varepsilon(\omega_0)-1]$。如果函数 $\varepsilon(\omega)$ 是对电介质而言，则无須繞过坐标原点，于是沿全部实軸的积分給出

$$\lim_{\rho\to 0}\left\{\int_{-\infty}^{-\rho+\omega_0}\frac{\varepsilon-1}{\omega-\omega_0}d\omega+\int_{\rho+\omega_0}^{\infty}\frac{\varepsilon-1}{\omega-\omega_0}d\omega\right\}-i\pi[\varepsilon(\omega_0)-1]=0.$$

第一項是从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 的积分，理解为它的主値。一般是在积分符号上画一斜綫来表示这种情况，于是我們有

$$\int\!\!\!\!\!-_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varepsilon-1}{\omega-\omega_0}d\omega-i\pi[\varepsilon(\omega_0)-1]=0. \tag{62.7}$$

积分变数 ω 在这里只取实数值。我們用字母 x 代换它，而用 ω 表示某一实値 ω_0；如 § 58 內一样。我們也把实变数 ω 的函数 $\varepsilon(\omega)$ 写成 $\varepsilon(\omega)=\varepsilon'(\omega)+i\varepsilon''(\omega)$，分开(62.7)式內的实数部分和虛数部分，我們最后得到下面二个公式：

$$\varepsilon'(\omega)-1=\frac{1}{\pi}\int\!\!\!\!\!-_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varepsilon''(x)}{x-\omega}dx, \tag{62.8}$$

$$\varepsilon''(\omega)=-\frac{1}{\pi}\int\!\!\!\!\!-_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varepsilon'(x)-1}{x-\omega}dx. \tag{62.9}$$

它們最先由H. A. 克拉梅斯(Kramers)和R. De L. 克朗尼(Kronig)得到(1927)。应着重指出的是，推导这些公式所用到的函数 $\varepsilon(\omega)$ 的唯一重要性质是在上半平面內不存在奇点[①]。因此，可以說克拉梅斯-克朗尼公式，和上述的 $\varepsilon(\omega)$ 的性质一样，是物理学中因果律的直接結果。

利用 $\varepsilon''(x)$ 是奇函数这一性质，可以将(62.8)式改写为

---

① 当 $\omega\to\infty$ 时 $\varepsilon\to 1$ 这一性质并不是重要的，因为如果极限值 $\varepsilon(\infty)$ 异于1，則我們必須取差值 $\varepsilon-\varepsilon(\infty)$ 以代替差值 $\varepsilon-1$，并且(62.8)和(62.9)式相应地明显地改变形式。

$$\varepsilon'(\omega)-1=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\frac{\varepsilon''(x)}{x-\omega}dx+\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\frac{\varepsilon''(x)}{x+\omega}dx,$$

或

$$\varepsilon'(\omega)-1=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{x\varepsilon''(x)}{x^2-\omega^2}dx. \quad (62.10)$$

如果指的是金屬，則在 $\omega=0$ 的点处，函数 $\varepsilon(\omega)$ 有一极点，在这极点附近，$\varepsilon=\frac{4\pi\sigma i}{\omega}$(58.9)。沿半圓繞过这奇点时在积分內給出一附加的实数項：$-\frac{4\pi\sigma}{\omega_0}\pi$，我們必須把它加到(62.7)式的左側。于是在公式(62.9)內也出現这一項：

$$\varepsilon''(\omega)=-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty\frac{\varepsilon'(x)}{x-\omega}dx+\frac{4\pi\sigma}{\omega}; \quad (62.11)$$

公式(62.8)或(62.10)則仍然保持不变。除此以外，对金屬还必須作下列說明。在 § 58 末曾經指出，在金屬內可能存在一个頻率区域，在这区域內，由于場的空間不均匀性效应，函数 $\varepsilon(\omega)$ 失去物理意义。但是在上面給出的公式內必須对全部的頻率进行积分。在这种情况下，在相应的頻率区域內，必須把 $\varepsilon(\omega)$ 理解为由求解物体在虛构的空間均匀的周期电場內（而不是在非均匀的电磁波場內）的行为这一形式問題而得到的函数。

公式(62.10)是特別重要的。对于給定的物体，即使只是近似地（例如由經驗）知道了函数 $\varepsilon''(\omega)$，但由(62.10)即可以算出函数 $\varepsilon'(\omega)$。这时重要的是，对于滿足物理上必要条件 $\varepsilon''>0$（当 $\omega>0$）的任何函数 $\varepsilon''(\omega)$ 而言，由(62.10)式所得出的函数 $\varepsilon'(\omega)$ 都不与物理上任何必要的要求矛盾，也即是它在原則上是可能的函数（ε' 的正負号和数値幷不受任何的一般物理条件的限制）。由于这种情况，甚至函数 $\varepsilon''(\omega)$ 是近似的，也仍然可以利用公式(62.10)。相

反地，公式(62. 9)則不能給出物理上可能的函数 $\varepsilon''(\omega)$ [在 $\varepsilon'(\omega)$ 为任意函数的普遍情况下]，因为它不能自动保证后者取正值。

在色散理論中，一般把 $\varepsilon'(\omega)$ 的表达式写为

$$\varepsilon'(\omega)-1=-\frac{4\pi e^2}{m}\int_0^\infty\frac{f(x)}{\omega^2-x^2}dx, \qquad (62.12)$$

式中 e 和 m 分别为电子的电荷和质量，而 $f(\omega)d\omega$ 称为在頻率范圍 $d\omega$ 內的振子强度(或"色散电子数")。按照(62. 10)，这个量和 $\varepsilon''(\omega)$ 的关系为

$$f(\omega)=\frac{m}{2\pi^2e^2}\omega\varepsilon''(\omega). \qquad (62.13)$$

在金屬的情况下，当 $\omega\to0$ 时，$f(\omega)$ 趋近于有限的极限值。

如果 ω 取相当大的数値，則在(62. 10)的被积式內，与 ω 比較，可以略去 x。于是

$$\varepsilon'(\omega)-1=-\frac{2}{\pi\omega^2}\int_0^\infty x\varepsilon''(x)dx.$$

另一方面，对高頻下的介电常数，我們得到公式(59. 1)。比較两个式子，得到公式:

$$\frac{m}{2\pi^2e^2}\int_0^\infty\omega\varepsilon''(\omega)d\omega=\int_0^\infty f(\omega)d\omega=N, \qquad (62.14)$$

式中 N 为物质单位体积內的总电子数。

如果 $\varepsilon''(\omega)$ 当 $\omega=0$ 时无奇点，則在公式(62. 10)內，可以化到极限 $\omega\to0$，于是我們得到

$$\varepsilon'(0)-1=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{\varepsilon''(x)}{x}dx. \qquad (62.15)$$

如果 $\omega=0$ 是函数 $\varepsilon''(\omega)$ 的奇点(金屬)，則 $\omega\to0$ 时积分(62. 10)所趋近的极限值和在(62. 10)內簡单地消去 ω 所得到的值不相等。

为了求出上述的极限，我們必須在被积式內先用

$$\varepsilon''(x)-\frac{4\pi\sigma}{x}$$

代替 $\varepsilon''(x)$；这种代换并不改变积分的数值，因为总是

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2-\omega^2}=0.$$

对于电介质，可以把(62.15)式改写成

$$\varepsilon_0-1=\frac{4\pi e^2 N}{m}\overline{\omega^{-2}}, \tag{62.16}$$

式中的短横表示对"振子数"求平均：

$$\overline{\omega^{-2}}=\frac{1}{N}\int_0^\infty \frac{f(\omega)}{\omega^2}d\omega.$$

这个式子对計算 ε_0 的值有用。

我們还导出一个公式，它将虛半軸上的 $\varepsilon(\omega)$ 值表示为实軸上的 $\varepsilon''(\omega)$ 值。为此，我們来研究积分

$$\int\frac{\omega[\varepsilon(\omega)-1]}{\omega^2+\omega_0^2}d\omega,$$

它对由实軸和上半平面內的无穷远半圓所組成的迴路 C 积分（ω_0 为实数）。利用被积式相对于极点 $\omega=i\omega_0$ 的留数，即可算出这一积分。另一方面，对无穷远半圓的积分等于零，于是得到

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\omega[\varepsilon(\omega)-1]}{\omega^2+\omega_0^2}d\omega=\pi i[\varepsilon(i\omega_0)-1].$$

在等式的左側，由于被积函数是奇次的，积分的实数部分变为零。我們再用 ω 和 x 代替 ω_0 和 ω，最后得到

$$\varepsilon(i\omega)-1=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{x\varepsilon''(x)}{x^2+\omega^2}dx. \tag{62.17}$$

如果将这式子的两側对 $d\omega$ 积分，得到

$$\int_0^\infty [\varepsilon(i\omega)-1]d\omega=\int_0^\infty \varepsilon''(\omega)d\omega. \qquad (62.18)$$

上述的全部結果，只要稍作改变，也完全适用于磁导率 $\mu(\omega)$。其差别首先是由于頻率增加时，函数 $\mu(\omega)$ 較早地失去物理意义。因此，例如，必須按下列方式将克拉梅斯-克朗尼公式应用到 $\mu(\omega)$ 上。我們不研究 ω 值的无限間隔，而只研究 ω 的有限間隔(从 0 至 ω_1)，这間隔只扩展到这样的頻率，这时 μ 还具有物理意义，但已不再变化，而它的虛数部分可以假定等于零；相应的 μ 的实值我們以 μ_1 表示，于是公式(62.10)必須写成

$$\mu'(\omega)-\mu_1=\frac{2}{\pi}\int_0^{\omega_1}\frac{x\mu''(x)}{x^2-\omega^2}dx. \qquad (62.19)$$

与 ε_0 不同，$\mu_0=\mu(0)$ 的值可以小于，也可以大于 1，$\mu(\omega)$ 在虛軸上的变化仍然是单調递减的，这一次是从 μ_0 减小到 $\mu_1<\mu_0$。

§63. 平面单色波

单色場的麦克斯韦方程(58.2)为

$$i\omega\mu(\omega)\mathbf{H}=c\,\mathrm{rot}\,\mathbf{E},\qquad i\omega\varepsilon(\omega)\mathbf{E}=-c\,\mathrm{rot}\,\mathbf{H}. \qquad (63.1)$$

这些方程本身构成一个完全方程組，因为(58.1)式可以从(63.1)自动地得出，因而不必单独研究。我們假定媒质是均匀的，从方程(63.1)內消去 $\mathbf{H}$，我們得到二次方程为

$$\Delta\mathbf{E}+\varepsilon\mu\frac{\omega^2}{c^2}\mathbf{E}=0, \qquad (63.2)$$

由消去 $\mathbf{E}$，得到 $\mathbf{H}$ 的相似方程。

我們来研究在无限的均匀媒质內傳播的平面电磁波。对真空內的平面波，場对坐标的关系由因子 $e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}$ 給出，其中 $\mathbf{k}$ 为实数波矢量。在普遍情况下研究波在物质內的傳播时，还必須引入复

数值:

$$\mathbf{k}=\mathbf{k}'+i\mathbf{k}'',$$

式中 $\mathbf{k}'$,$\mathbf{k}''$是实数矢量。

假定 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{H}$ 与 $e^{i\mathbf{kr}}$ 成正比，并在(63.1)式内对坐标求微分，我們得到

$$\omega\mu\mathbf{H}=c[\mathbf{kE}],\quad \omega\varepsilon\mathbf{E}=-c[\mathbf{kH}]. \tag{63.3}$$

从这二个关系式內消去 $\mathbf{E}$ 或 $\mathbf{H}$，我們得到"波矢量"的平方的表达式为

$$k^2=k'^2-k''^2+2i\mathbf{k}'\mathbf{k}''=\varepsilon\mu\frac{\omega^2}{c^2}. \tag{63.4}$$

我們看到，只当 ε 和 μ 为正的实値时，$\mathbf{k}$ 才是实数。但是甚至在这种情况下，如果 $\mathbf{k}'\mathbf{k}''=0$，$\mathbf{k}$ 也可以为复数(研究全反射时我們即遇到这种情况，参閱 § 66)。

应注意到，在 $\mathbf{k}$ 为复数的普遍情况下，只在一定的意义上，波才能称为平面波。写出

$$e^{i\mathbf{kr}}=e^{i\mathbf{k}'\mathbf{r}}e^{-i\mathbf{k}''\mathbf{r}},$$

我們見到，垂直于矢量 $\mathbf{k}'$ 的平面为周相不变的平面。垂直于矢量 $\mathbf{k}''$ 的平面为振幅不变的平面，而在 $\mathbf{k}''$ 的方向发生波的衰减。場本身为常数値的面，在普遍情况下一般不是平面。这种波称为"非一致平面波"，以区别于通常的"一致平面波"。

在普遍情况下，电場分量和磁場分量間的关系由(63.3)式給出。特别是用 $\mathbf{k}$ 标乘(63.3)式，我們得到

$$\mathbf{kE}=0,\qquad \mathbf{kH}=0, \tag{63.5}$$

取其中的一个平方之，并利用(63.4)，我們得到

$$\mathbf{E}^2=\frac{\mu}{\varepsilon}\mathbf{H}^2. \tag{63.6}$$

但是应該記住，由于三个矢量 $\mathbf{k}$，$\mathbf{E}$，$\mathbf{H}$ 都是复数，因此在普遍情况下，这些关系式沒有如它們为实数时那样直观的意义。

我們不去詳細討論普遍情况下所得到的复杂的关系式，我們只是研究几个最重要的特殊情况。

对在不吸收的(透明的)均匀媒质內无衰减地傳播的波，我們得到特别簡单的結果，在这种情况下，波矢量为实数，并且其値等于

$$k=\sqrt{\varepsilon\mu}\frac{\omega}{c}=n\frac{\omega}{c}, \tag{63.7}$$

式中 $n=\sqrt{\varepsilon\mu}$ 称为媒质的折射率。电場和磁場都在垂直于矢量 $\mathbf{k}$ 的平面內(是純粹的横波)，并且互相垂直，它們的关系为

$$\mathbf{H}=\sqrt{\varepsilon/\mu}[\mathbf{lE}] \tag{63.8}$$

式中 $\mathbf{l}$ 为 $\mathbf{k}$ 方向的单位矢量。由此得出，$\varepsilon E^2=\mu H^2$，但是这并不表明波內的电能和磁能是相等的(如同不存在色散的情况)，因为这些能量由不同的式子得出[即(61.10)式內的两項]。

媒质內波的傳播速度 u 由熟知的群速度的式子給出[①]：

$$u=\frac{d\omega}{dk}=\frac{c}{d(n\omega)/d\omega}. \tag{63.9}$$

容易证明，該速度为

$$u=\bar{S}/\bar{U}, \tag{63.10}$$

这和它是波包內能量的迁移速度的意义符合一致；此处 $\bar{U}$ 是由(61.9)式所給出的能量密度，而

$$\bar{S}=\frac{c}{8\pi}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\mathbf{EE}^* \tag{63.11}$$

为坡印廷矢量的平均值。在色散不存在时，折射率与頻率无关，于是(63.9)式簡单地变为 c/n [比較(56.13)]。

其次，我們来研究电磁波在吸收媒质內傳播的更普遍的情况，而且波矢量具有确定的方向，也即是 $\mathbf{k}'$ 和 $\mathbf{k}''$ 互相平行。这种波

① 当存在重大的吸收时，引进群速度的概念一般是不可能的，因为在吸收媒质中波包不能傳播，而会很快地"散开"。

是眞正的平面波，因为波內場为常数值的面为垂直于傳播方向的平面（“一致”平面波）。

在这种情况下，可以引进波矢量的“长度”k 为 $\mathbf{k}=k\mathbf{l}$（其中 $\mathbf{l}$ 为 $\mathbf{k}'$ 和 $\mathbf{k}''$ 方向的单位矢量），并从(63.4)得到 $k=\sqrt{\varepsilon\mu}\,\omega/c$。复数量 $\sqrt{\varepsilon\mu}$ 通常写为 $n+i\kappa$，其中 n 和 κ 为实数，于是

$$k=\sqrt{\varepsilon\mu}\,\frac{\omega}{c}=(n+i\kappa)\frac{\omega}{c}. \tag{63.12}$$

n 称为媒质的折射率，而 κ 称为媒质的吸收系数；后者确定波随傳播而衰减的速度。但是应着重指出，波的衰减不一定是由于眞吸收；只当 ε 和 μ 为复数时才存在能量耗散，但系数 κ 甚至当 ε 和 μ 为负的实数时也可以不为零。

我們将用介电常数的实数部分和虛数部分来表示 n 和 κ，这时假定 $\mu=1$。从等式

$$n^2-\kappa^2+2in\kappa=\varepsilon=\varepsilon'+i\varepsilon'',$$

我們得到 $n^2-\kappa^2=\varepsilon'$，$2n\kappa=\varepsilon''$。对 n 和 κ 解这些方程，我們得到[①]

$$n=\sqrt{\frac{\varepsilon'+\sqrt{\varepsilon'^2+\varepsilon''^2}}{2}},\quad \kappa=\sqrt{\frac{-\varepsilon'+\sqrt{\varepsilon'^2+\varepsilon''^2}}{2}}. \tag{63.13}$$

特别是，对于金屬，在(58.9)式适用的頻率区域內，ε 的虛数部分大于实数部分，并且和电导率的关系为 $\varepsilon''=4\pi\sigma/\omega$；与 ε'' 比較，略去 ε' 后，我們发現 n 与 κ 相等：

$$n=\kappa=\sqrt{\frac{2\pi\sigma}{\omega}}. \tag{63.14}$$

在我們所研究的一致平面波內，对于場 $\mathbf{E}$ 与 $\mathbf{H}$ 的关系，我們重新得到(63.8)式，但只是其中的 ε 和 μ 为复数。这个式子再一次指明，两个場都垂直于波的傳播方向，并且互相垂直。如果 $\mu=1$，

---

① 因为 $\varepsilon''>0$，因而 n 和 κ 的正負是必須相同，这与波在傳播方向发生衰减符合一致。在(63.13)內选擇正号，相应于在 x 軸正方向傳播的波。

則把$\sqrt{\varepsilon}$写成

$$\sqrt{\varepsilon}=\sqrt{n^2+\kappa^2}\,e^{i\,\mathrm{arctg}(\kappa/n)}$$

后，我們看到，磁場的絕对值超过电場$\sqrt{n^2+\kappa^2}$倍，而相位則落后一个角度 $\mathrm{arctg}\frac{\kappa}{n}$；特別是在(63.14)的情况下，相移等于 $\pi/4$。

例　　題

設在某一时刻($t=0$)，在空間的某一区域內存在电磁扰动。如果沒有外电源的維持，电磁扰动將随时間而衰減。試求决定这种衰減率的条件。

解. 我們將初始扰动展开为对坐标的傅立叶积分，并且研究波矢量为 $\mathbf{k}$ 的某一分量($\mathbf{k}$ 是实矢量!)。它对时間的依賴关系由因子 $e^{-i\omega t}$ 給出(当 t 相当大时)，其中 ω 为待决定的复数"频率"；衰減率为 $-\mathrm{Im}\,\omega$。

从方程

$$-\frac{1}{c}\dot{\mathbf{H}}=\mathrm{rot}\,\mathbf{E}=i[\mathbf{kE}],\ \frac{1}{c}\dot{\mathbf{D}}=\mathrm{rot}\,\mathbf{H}=i[\mathbf{kH}],$$

消去 $\mathbf{H}$ 后，我們得到

$$\frac{1}{c}\ddot{\mathbf{D}}=[\mathbf{k}[\mathbf{kE}]]. \tag{1}$$

选擇 $\mathbf{k}$ 方向为 x 軸。对于扰动的"纵向"部分，由此得到 $\ddot{D}_x=0$，因此 $D_x=0$。

另一方面，D_x 和 E_x 的关系由下列积分算符得出：

$$E_x(t)=\hat{\varepsilon}^{-1}D_x=\int_{-\infty}^{t}F(t-\tau)D_x(\tau)d\tau \tag{2}$$

(与 § 58 比較)。因为在現在的情况下，$\tau>0$ 时，$D_x(\tau)=0$，因而

$$E_x(t)=\int_{-\infty}^{0}F(t-\tau)D_x(\tau)d\tau. \tag{3}$$

由此看出，在 t 很大时，E_x 对时間的依賴关系主要决定于函数 $F(t)$ 对时間的依賴关系。

对于单色場，由(2)我們得到

$$\frac{1}{\varepsilon(\omega)}=\int_{0}^{\infty}F(x)e^{i\omega x}dx,$$

或者反过来

$$F(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}\frac{1}{\varepsilon(\omega)}e^{-i\omega t}d\omega.$$

为了算出 t 很大时这个积分的数值，我們把积分路綫移到 ω 的下半平面內，于是被积式很快地减小。这时必須繞过函数 $1/\varepsilon(\omega)$ 的全部奇点（也即是函数 $\varepsilon(\omega)$的零点）和它的分支点。結果积分主要与 $e^{-i\omega_0 t}$ 成比例，其中 ω_0 为上述奇点中离开实軸最近的点。由此可以求出电磁扰动“纵向”部分問題的解。

对于横向分量，由(1)式，我們得到

$$\frac{1}{c^2}\ddot{D}_{y,z}+k^2E_{y,z}=0$$

由类似的研究得到結果为：所求的“頻率” ω_0 在現在的情况下为函数

$$\omega^2\varepsilon(\omega)-c^2k^2$$

的最靠近实軸的零点或分支点。

§64. 透明媒质

我們現在把 §62 內所得到的普遍公式应用到弱吸收（在給定的頻率范圍內）的媒质上，也即是我們将假定，对于这些頻率，可以略去介电常数的虛数部分。

在这种情况下，不必取(62.10)式內的主值，因为 $x=\omega$ 的点实际上已不在积分区域內。然后可以将积分对参量 ω 求微分，和对待被积式內无奇点的通常积分一样。經过这样微分后，我們得到

$$\frac{d\varepsilon}{d\omega}=\frac{4\omega}{\pi}\int_0^\infty\frac{x\varepsilon''(x)dx}{(\omega^2-x^2)^2}.$$

由于被积式在全部积分区域內为正的，我們得到結果为

$$\frac{d\varepsilon(\omega)}{d\omega}>0, \tag{64.1}$$

也即是在无吸收的区域內，介电常数是頻率的单調递增函数。

由类似方式，在相同的頻率区域內，还得到另一个不等式：

$$\frac{d}{d\omega}[\omega^2(\varepsilon-1)]=\frac{4\omega}{\pi}\int_0^\infty\frac{x^3\varepsilon''(x)}{(x^2-\omega^2)^2}dx>0,$$

或

$$\frac{d\varepsilon}{d\omega}>\frac{2(1-\varepsilon)}{\omega}. \tag{64.2}$$

如果 $\varepsilon<1$ 或甚至变成負的，則这个不等式要比不等式(64.1)强。

我們注意到，不等式(64.1)和(64.2)(以及对 $\mu(\omega)$ 的类似式子)自动保证了波的傳播速度滿足不等式 $u<c$。例如，$\mu=1$ 时，我們有 $n=\sqrt{\varepsilon}$，在(64.1)和(64.2)內用 n 代替 ε，我們得到

$$\frac{d(n\omega)}{d\omega}>n,\quad \frac{d(n\omega)}{d\omega}>\frac{1}{n}. \tag{64.3}$$

因此，对于速度 u(63.9)，我們得到两个不等式：$u<\frac{c}{n}$ 和 $u<cn$，由此看出，当 $n>1$ 或 $n<1$ 时 $u<c$。这些不等式也指明了 $u>0$，也即是群速度和波矢量同向。这是完全自然的，虽然从純粹的邏輯观点看来并不是必然的。

我們假定，弱吸收区域扩展到一个广闊的頻率范圍，即从 ω_1 至 ω_2(而且 $\omega_2\gg\omega_1$)，并且假定頻率 ω 为 $\omega_1\ll\omega\ll\omega_2$，于是(62.10)式內的积分区域可以分成两部分：$x<\omega_1$ 和 $x>\omega_2$。在第一部分內，与 ω 比較，可以略去被积式分母內的 x，而在第二部分，与 x 比較，可以略去 ω：

$$\varepsilon(\omega)=1+\frac{2}{\pi}\int_{\omega_2}^\infty\varepsilon''(x)\frac{dx}{x}-\frac{2}{\pi\omega^2}\int_0^{\omega_1}x\varepsilon''(x)dx, \tag{64.4}$$

也即是在所研究的区域內，函数 $\varepsilon(\omega)$ 的形式为 $a-b/\omega^2$，式中 a 和 b 为正常数。其中第二个常数 b 可用从 0 到 ω_1 的区域內引起吸收的“色散电子数” N_1 来表示[参考(62.14)]，于是

$$\varepsilon(\omega)=a-\frac{4\pi N_1e^2}{m\omega^2}. \tag{64.5}$$

从这式子特别得出，在相当宽广的弱吸收区域內，介电常数一般說来通过零点。这时我們記住，名副其实的透明媒质是：在这种媒质內不但 $\varepsilon(\omega)$ 为实数，而且是正的；在 ε 为負値的情况下，波在媒质内部发生衰减，虽然其中幷无眞正的能量耗散。

对于 $\varepsilon=0$ 的頻率，感应强度 $\mathbf{D}$ 恒为零，因而麦克斯韦方程在磁場为零时容許滿足一个方程 $\operatorname{rot}\mathbf{E}=0$ 的交变电場存在。換句話說，在这种情况下可能存在纵电波。为了求出它們的傳播速度，不但必須考慮到介电常数对頻率的色散，而且还必須考慮到它对波矢量的色散。这时 $\varepsilon=0$ 的 ω 值也是波矢量的函数。由于媒质是各向同性的，因而在标量函数 $\omega(\mathbf{k})$ 的展开式內零次項后的第一項与 $\mathbf{k}^2$ 成正比：

$$\omega=\omega_0+\frac{1}{2}\alpha\mathbf{k}^2.$$

所以傳播速度

$$\mathbf{u}=\frac{d\omega}{d\mathbf{k}}=\alpha\mathbf{k}$$

与波矢量本身成正比。

例 題

設被半透明媒质($\mu=1$)所充滿的半空間($x>0$)的边界上，垂直地射入具有尖銳波陣面的平面电磁波。試求通过媒质內的波陣面的結构(A. 索末菲和 L. 布里淵, 1914)。

解. 假設在 $t=0$ 时电磁波入射到媒质的边界上，于是当 $x=0$ 时，入射波場(E或H)为

$$\text{当 } t<0:\ E=0,\qquad \text{和当 } t>0:\ E\backsim e^{-i\omega_0 t},$$

把这場展开为对时間的傅立叶积分，于是問題化为无限扩展的各种頻率的波入射到同一边界上。頻率为 ω 的傅立叶分量的振幅与

$$\int_0^\infty e^{i(\omega-\omega_0)\tau}d\tau.$$

成正比。当頻率为 ω 的波入射时，透射过媒质的波的形状为

$$a(\omega)e^{-i\omega t+i\frac{\omega}{c}nx},$$

式中振幅 $a(\omega)$ 为頻率的緩变化函数。因此，在現在的情况下，媒质內的波場为

$$E\backsim\int_{-\infty}^{+\infty}d\omega\, a(\omega)\, e^{-i\omega t+i\frac{\omega}{c}nx}\int_{0}^{\infty}e^{i(\omega-\omega_0)\tau}d\tau.$$

在波陣面附近的区域內，在这积分內，ω 的重要値是接近 ω_0 的値。引入新变数 $\xi=\omega-\omega_0$ 后，用 $a(\omega_0)$ 代換 $a(\omega)$，而把指数展开为 ξ 的冪級数。略去不重要的常数和相因子后，我們得到

$$E\backsim\int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{i\xi\left(\tau-t+\frac{x}{u}\right)-\frac{i\xi^2}{2}x\frac{u'}{u^2}\right\}d\xi\, d\tau,$$

式中 $u=u(\omega_0)$ 为傳播速度(63.9)，而 $u'=\left.\frac{du}{d\omega}\right|_{\omega=\omega_0}$。对 $d\xi$ 进行积分，容易把 E 化成下列形式：

$$E\backsim\int_{w}^{\infty}e^{\pm i\eta^2}\,d\eta,\qquad w=\frac{x-ut}{\sqrt{2x|u'|}}$$

（指数內的正負号决定于 u' 的正負号）。在波陣面附近，波的强度按下列規律而分布：

$$I\backsim\left|\int_{w}^{\infty}e^{i\eta^2}\,d\eta\right|^2.$$

这个公式在形式上和菲涅耳衍射中确定暗影边緣附近强度分布的公式相同①。当 $w>0$ 时，强度随 w 的增加而單調地减小，但当 $w<0$ 时，則在 $w\to-\infty$ 时所趋近的常数値附近，作着振幅衰减的振蕩②。

---

① 参閱"場論"第二版 § 60。

② 在所研究的波陣面前面的大距离上，发現先有以速度 c 傳播的所謂"預报信号"，它們相应于大頻率的傅立叶分量(其中 $\varepsilon\to1$)。

第十章　电磁波的傳播

§65. 几何光学

大家知道，几何光学可以应用的条件[①]是波长 λ 应小于問題內的特征綫度 l。几何光学和波动光学的关系是：当 $\lambda \ll l$ 时，描写波場的任何量 φ（**E** 或 **H** 的任一分量）可用下列公式表示：

$$\varphi = a e^{i\psi},$$

式中振幅 a 是坐标和时間的緩变化函数，而波相 ψ 为一很大的量，差不多是坐标和时間的“綫性”函数。ψ 在几何光学中称为光程函数，并且起着十分重要的作用。ψ 对时間的导数給出波的頻率：

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\omega, \tag{65.1}$$

而对坐标的导数給出波矢量：

$$\nabla \psi = \mathbf{k}, \tag{65.2}$$

因而也給出空間每一点处的光綫方向。

对稳定条件下的单色波，頻率为一常数，而光程函数与时間的关系由 $-\omega t$ 的項給出。于是我們代替 ψ 可以按照下式引进另一个函数 ψ_1（它也叫作光程函数）：

$$\psi = -\omega t + \frac{\omega}{c}\psi_1(x, y, z); \tag{65.3}$$

ψ_1 只是坐标的函数，而它的陡度为

$$\nabla \psi_1 = \mathbf{n}, \tag{65.4}$$

式中 $\mathbf{n}$ 为一矢量，它和 $\mathbf{k}$ 的关系为

---

① 参閱“場論”，第二版，§53。

$$\mathbf{k}=\frac{\omega}{c}\mathbf{n}. \tag{65.5}$$

矢量 $\mathbf{n}$ 的絕对値等于媒质的折射率 n[①]。因此，在折射率为 $n(x,y,z)$ 的媒质內（n是給定的坐标的函数），光綫傳播的光程函数方程为

$$(\nabla\psi_1)^2\equiv\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial z}\right)^2=n^2. \tag{65.6}$$

从費馬原理也可以得到稳定条件下的光綫傳播方程，按照这个原理，沿空間內两給定点 A 和 B 間的光綫路程进行积分，积分 $\int_A^B \mathbf{k}\,d\mathbf{l}$ 或者积分

$$\psi_1=\int_A^B \mathbf{n}\,d\mathbf{l}=\int_A^B n\,dl$$

为极小値。令这积分的变分等于零，我們得到

$$\delta\psi_1=\int_A^B(\delta n\cdot dl+n\,\delta dl)=0.$$

設 $\delta\mathbf{r}$ 为变分时的光綫路程的位移，于是我們有

$$\delta n=\delta\mathbf{r}\cdot\nabla n,\qquad \delta dl=\mathbf{l}\,d\delta\mathbf{r},$$

式中 $\mathbf{l}$ 为光綫切綫方向的单位矢量。将上式代入 $\delta\psi_1$ 內，并在第二項內进行分部积分（考虑到在点 A 和点 B 处，$\delta\mathbf{r}=0$），我們得到

$$\delta\psi_1=\int_A^B\delta\mathbf{r}\cdot\nabla n\,dl+\int_A^B n\mathbf{l}\,d\delta\mathbf{r}=$$

$$=\int_A^B\left(\nabla n-\frac{d(n\mathbf{l})}{dl}\right)\delta\mathbf{r}\cdot dl=0.$$

由此得

① 在几何光学中，只研究透明媒质。

$$\frac{d(n\mathbf{l})}{dl}=\nabla n. \tag{65.7}$$

把导数展开，并代入$\frac{dn}{dl}=\mathbf{l}\,\nabla n$，我們可以把这方程改写为

$$\frac{d\mathbf{l}}{dl}=\frac{1}{n}[\nabla n-\mathbf{l}(\mathbf{l}\,\nabla n)]. \tag{65.8}$$

这也就是确定光綫形状的方程。

从微分几何可知，沿光綫路程的导数$\frac{d\mathbf{l}}{dl}$等于$\mathbf{N}/R$，其中$\mathbf{N}$为主法綫上的单位矢量，而R为光綫的曲率半徑。将(65.8)式的两側乘上$\mathbf{N}$，并考虑到$\mathbf{N}$与$\mathbf{l}$相互垂直，我們得到

$$\frac{1}{R}=\mathbf{N}\frac{\nabla n}{n}. \tag{65.9}$$

光綫弯向折射率增加的方向。

在几何光学中，光綫的傳播速度沿$\mathbf{l}$的方向，并由下列导数得出：

$$\mathbf{u}=\frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{k}}. \tag{65.10}$$

这速度也称为群速度，而比值ω/k称为相速度。但是必須注意到，后者并不符合于任何量的实际的物理傳播速度。

也容易导出确定光强度沿光綫变化的方程。光强度I代表对时間平均的坡印廷矢量的絕对值。这矢量和群速度一样，在$\mathbf{l}$的方向上：

$$\overline{\mathbf{S}}=I\mathbf{l}.$$

在稳定条件下，空間每一点处場能的平均密度并不随时間而改变。因此能量守恒方程为$\operatorname{div}\overline{\mathbf{S}}=0$，或者

$$\operatorname{div}(I\mathbf{l})=0. \tag{65.11}$$

这即是所要求出的方程。

最后，我們来研究綫偏振光的偏振方向沿光綫方向如何变化

的問題(C. M. 雷托夫, 1938)。

从微分几何可知，空間曲綫(在現在的情况下为光綫)在空間每一点处由三个互相垂直的单位矢量：切綫 $\mathbf{l}$，主法綫 $\mathbf{N}$ 和次法綫 $\mathbf{b}$ 来表示，它們組成一个自然的三面体。由于电磁波是横向的，因而矢量 $\mathbf{E}$(或 $\mathbf{H}$)总是在法綫平面，即 $\mathbf{N}, \mathbf{b}$ 平面內。

設在光綫的某一点处，$\mathbf{E}$ 的方向和 $\mathbf{N}$ 的方向相合，也即是位于密切面($\mathbf{N}, \mathbf{l}$ 平面)內。大家知道，在 dl 长度上，曲綫与密切平面的偏差为高次(三次)无穷小量。因此可以断言，沿光綫方向移动 dl 距离后，矢量 $\mathbf{E}$ 仍在原来的密切平面內。但新密切平面相对于旧密切平面轉动一角度 $d\varphi=\frac{dl}{T}$，式中 T 为曲綫的扭轉半徑。因此这也等于矢量 $\mathbf{E}$ 相对于法綫平面內的矢量 $\mathbf{N}$ 所轉过的角度。由此可見，沿光綫方向移动时，偏振方向在法綫平面內轉动，以使偏振方向与主法綫方向間的夹角按方程

$$\frac{d\varphi}{dl}=\frac{1}{T} \tag{65.12}$$

而改变。特别是无扭轉时，也即是光綫为平面曲綫时，矢量 $\mathbf{E}$ 在法綫平面內的方向仍然不变，这可从对称性預先看出。

例 題

試求出光綫在相对于观察者运动的媒质內的傳播速度。

解. 設 ω 和 $\mathbf{k}$ 为光波在靜止参考系 K 內的頻率和波矢量，而 ω' 和 $\mathbf{k}'$ 为在相对于 K 以速度 $\mathbf{v}$ 随媒质一起运动的参考系 K' 內的頻率和波矢量。在下面所研究的对 $\frac{\mathbf{v}}{c}$ 的第一近似下，垂直于 $\mathbf{k}$ 方向的运动并不影响光的傳播；因此对普遍性无任何限制，我們將假定 $\mathbf{v}$ 和 $\mathbf{k}$ 的方向相同。

在 K' 系內媒质是靜止的，因而 ω' 和 k' 的关系式为

$$ck'=\omega' n(\omega'). \tag{1}$$

按照熟知的相对論变换公式①，精确到$\frac{\mathbf{v}}{c}$的一次項，我們有

$$\omega'=\omega-kv,\quad k'=k-\frac{\omega}{c^2}v.$$

把这些式子代入(1)式內，并将函数 $n(\omega')$ 展开，在同样的精确度下，我們得到

$$k=n\frac{\omega}{c}+\frac{v\omega}{c^2}\left(1-n\frac{d(n\omega)}{d\omega}\right),\tag{2}$$

式中 $n=n(\omega)$。由此求得傳播速度(群速度)为

$$u=u_0+v\left(1-\frac{u_0^2}{c^2}\right)-\frac{vn\omega}{c}\frac{du_0}{d\omega},\tag{3}$$

式中 $u_0=c\Big/\frac{d}{d\omega}(n\omega)$为在静止媒质內的傳播速度。相速度为

$$\frac{\omega}{k}=\frac{c}{n}+v\left(1-\frac{1}{n^2}+\frac{\omega}{n}\frac{dn}{d\omega}\right).$$

(3)式內的头两項，可以簡单地应用相对論的速度相加公式而得到，而第三項表示色散效应(曾由 H. A. 洛倫茲研究过)。

§ 66. 波的反射和折射

我們現在来研究单色平面电磁波在两种均匀媒质的分界面上的反射和折射現象②。設波从透明媒质(媒质 1)射入，对于媒质2，暂时还不假定它是透明的。我們分别用下角标 0 和 1 来表示入射波和反射波的量，而用下角标 2 表示折射波的量(图 31)，并选擇分界面的法綫方向为 z 軸 (向媒质 2 內的方向为正)。

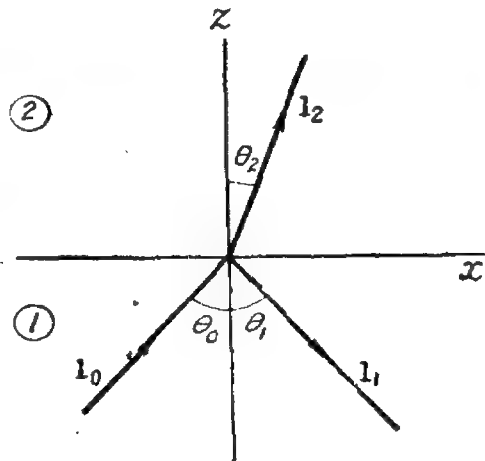


图 31

由于在 xy 平面內是完全均匀的，因而在全部空間內，場方程的解与这些坐标的关系必須相同。这表明对于这三种波，波矢量的分量 k_x 和 k_y 必須相同。由此首先得出，三

① 参閱"場論"第二版，§ 47。

② 在两种情况下，都假定 $\mu=1$。

种波的傳播方向在同一平面內。我們选擇这平面为 xz 平面。

从等式

$$k_{0x}=k_{1x}=k_{2x} \tag{66.1}$$

得到这些矢量的 z 分量为

$$k_{1z}=-k_{0z}=-\frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta_0.$$

$$k_{2z}=\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_2-k_{0x}^2}=\frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_2-\varepsilon_1\sin^2\theta_0}. \tag{66.2}$$

按照定义，矢量 $\mathbf{k}_0$ 为实数。因而 $\mathbf{k}_1$ 也为实数。但量 k_{2z} 在吸收媒质內为复数，而且取根的正負号必須使 $\mathrm{Im}k_{2z}>0$，这和折射波在媒质 *2* 內部衰減相符合。

如果两种媒质都是透明的，則从等式(66.1)得到熟知的反射和折射定律为

$$\theta_1=\theta_0,\quad \frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_0}=\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}=\frac{n_1}{n_2}. \tag{66.3}$$

要求出反射波和折射波的振幅，必須利用分界面($z=0$)上的边界条件　这时我們分別研究两种情况——电場 $\mathbf{E}_0$ 在入射平面內，或者与入射平面垂直；同时我們还研究 $\mathbf{E}_0$ 可以分解为两个这样的分量的普遍情况。

首先假定 $\mathbf{E}_0$ 垂直于入射平面；从对称性可知，这同样适用于反射波和折射波內的場 $\mathbf{E}_1$ 和 $\mathbf{E}_2$ 但矢量 $\mathbf{H}$ 在 x, z 平面內。边界条件要求 $E_y=E$ 和 H_x 为連續的①；按照(63.3)，$H_x=-\frac{c}{\omega}k_zE_y$。

媒质 *1* 內的場为入射波場和反射波場之和，于是我們得到两个方程：

$$E_0+E_1=E_2,\qquad k_{0z}(E_0-E_1)=k_{2z}E_2.$$

① $\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{D}$ 的法向分量的边界条件，在現在的情况下不給出任何新的結果，这和方程 $\mathrm{div}\,\mathbf{B}=0$, $\mathrm{div}\,\mathbf{D}=0$ 是方程(63.1)的結果相符合。

由于在三种波内 k_x(以及频率 ω)相等，因而等式两侧 E 内的指数因子被消去；在下面 **E** 理解为波的复数振幅。由解上述方程，得到下列的菲涅耳公式：

$$E_1=\frac{k_{0z}-k_{2z}}{k_{0z}+k_{2z}}E_0=\frac{\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta_0-\sqrt{\varepsilon_2-\varepsilon_1\sin^2\theta_0}}{\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta_0+\sqrt{\varepsilon_2-\varepsilon_1\sin^2\theta_0}}E_0,$$

$$E_2=\frac{2k_{0z}}{k_{0z}+k_{2z}}E_0=\frac{2\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta_0}{\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta_0+\sqrt{\varepsilon_2-\varepsilon_1\sin^2\theta_0}}E_0. \tag{66.4}$$

如果两种媒质是透明的，则利用关系式(66.3)，可以把(66.4)式写为

$$E_1=\frac{\sin(\theta_2-\theta_0)}{\sin(\theta_2+\theta_0)}E_0,$$

$$E_2=\frac{2\cos\theta_0\sin\theta_2}{\sin(\theta_2+\theta_0)}E_0. \tag{66.5}$$

E 在入射平面内的情况，可用类似的方式来研究；这时对垂直于入射面的磁場进行計算更为方便。結果又得到两个菲涅耳公式：

$$H_1=\frac{\varepsilon_2k_{0z}-\varepsilon_1k_{2z}}{\varepsilon_2k_{0z}+\varepsilon_1k_{2z}}H_0=\frac{\varepsilon_2\cos\theta_0-\sqrt{\varepsilon_1(\varepsilon_2-\varepsilon_1\sin^2\theta_0)}}{\varepsilon_2\cos\theta_0+\sqrt{\varepsilon_1(\varepsilon_2-\varepsilon_1\sin^2\theta_0)}}H_0,$$

$$H_2=\frac{2\varepsilon_2k_{0z}}{\varepsilon_1k_{2z}+\varepsilon_2k_{0z}}H_0=\frac{2\varepsilon_2\cos\theta_0}{\varepsilon_2\cos\theta_0+\sqrt{\varepsilon_1(\varepsilon_2-\varepsilon_1\sin^2\theta_0)}}H_0. \tag{66.6}$$

如果两种媒质是透明的，則这些公式可以写为

$$H_1=\frac{\operatorname{tg}(\theta_0-\theta_2)}{\operatorname{tg}(\theta_0+\theta_2)}H_0,$$

$$H_2=\frac{\sin 2\theta_0}{\sin(\theta_0+\theta_2)\cos(\theta_0-\theta_2)}H_0. \tag{66.7}$$

反射系数 R 定义为分界面所反射的(对时間)平均能通量与入射能通量之比，其中每一能通量由該波的坡印廷矢量(63.11)的 z 分量的平均値給出：

$$R=\frac{\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta_1|\mathbf{E}_1|^2}{\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta_0|\mathbf{E}_0|^2}=\frac{|\mathbf{E}_1|^2}{|\mathbf{E}_0|^2}.$$

在垂直入射时($\theta_0=0$)，两种偏振情况等效，于是反射系数由下式得出：

$$R=\left|\frac{\sqrt{\varepsilon_1}-\sqrt{\varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_1}+\sqrt{\varepsilon_2}}\right|^2. \tag{66.8}$$

这公式无論对透明的或吸收的反射媒质都正确。如果引进 n_2 和 κ_2 为$\sqrt{\varepsilon_2}=n_2+i\kappa_2$，于是，例如从眞空入射时($\varepsilon_1=1$)，我們得到

$$R=\frac{(n_2-1)^2+\kappa_2^2}{(n_2+1)^2+\kappa_2^2}. \tag{66.9}$$

对这些公式进一步的討論，我們将假定两种媒质都是透明的。首先我們作如下的一般說明。两种不同媒质間的分界面实际上并不是几何表面，而是一很薄的过渡层。公式(66.1)的正确性并不取决于对这种层的性质所作的任何假定。但利用分界面上的条件推导菲涅耳公式时，曾假定了过渡层的厚度 δ 小于波长 λ。通常厚度 δ 可以和原子間距离相比，后者在任何情况下都小于 λ(在相反的情况下，場的宏观描写一般变成不可能)；因此，条件 $\lambda\gg\delta$ 通常总是滿足的。在相反的极限情况下，折射現象具有完全不同的性质。当 $\delta\gg\lambda$ 时，滿足可以应用几何光学的条件(λ 小于媒质的不均匀綫度) 所以，在現在的情况下，可以把波的傳播看作光綫的傳播，这光綫在过渡层內受到折射，但通过它时不发生反射。換句話說，反射系数等于零。

我們現在回到菲涅耳公式 从透明媒质反射时，这些公式內的 $\mathbf{E}_1$、$\mathbf{E}_2$ 和 $\mathbf{E}_0$ 間的比例系数为实数①。这表明波相或者不变，或者改变 π，視这些系数的正負号而定。特别是折射波的波相总是

① 我們暂时略去全反射的情况(参閱下面)。

和入射波的波相相同。但在反射时可能波相发生改变①，例如垂直入射时，如果 $\varepsilon_1>\varepsilon_2$，則波相不变。但如果 $\varepsilon_2>\varepsilon_1$，則矢量 $\mathbf{E}_1$ 和 $\mathbf{E}_0$ 有相反的正負号，也即是波相改变 π。

当傾斜入射时，反射系数按照(66.5)和(66.7)式由下列公式得出:

$$R_\perp=\frac{\sin^2(\theta_2-\theta_0)}{\sin^2(\theta_2+\theta_0)},\qquad R_\parallel=\frac{\operatorname{tg}^2(\theta_2-\theta_0)}{\operatorname{tg}^2(\theta_2+\theta_0)}. \tag{66.10}$$

这里和下面，符号⊥和∥分别表示場 $\mathbf{E}$ 垂直于或者平行于入射面的情况。我們注意到下列的对称性质：交换 θ_2 和 θ_0 时，(66.10)式不改变[但反射波的波相，按照公式(66.5)和(66.7)这时改变 π]。換句話說，以 θ_0 角度从媒质 *1* 入射的波的反射系数，等于以 θ_2 角度从媒质 *2* 入射的波的反射系数。

以 θ_0 角$\left(使\ \theta_0+\theta_2=\frac{\pi}{2}\right)$入射的光的反射具有一种奇异的性质(这时反射光和折射光互相垂直)，我們令这角为 θ_p；写出

$$\sin\theta_p=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta_2\right)=\cos\theta_2,$$

并利用折射定律(66.3)，我們得到

$$\operatorname{tg}\theta_p=\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}. \tag{66.11}$$

当 $\theta_0=\theta_p$ 时，我們有 $\operatorname{tg}(\theta_0+\theta_2)=\infty$，而 $R_\parallel$ 变为零。因此，不論以这角度入射的光的偏振方向如何，反射光的偏振将是使其中的电場垂直于入射平面。当入射光为自然光时，反射光的偏振也是这样。这时具有其他偏振的分量一般不反射。θ_p 角称为全偏振角或者称为布勒斯特角(Brewster ngle)。我們注意到，虽然反射可以引起自然光的全偏振，但在折射光內，无論入射角如何，都不会

① 从吸收媒质的反射，一般說来引起橢圓偏振。这时三种波之間的振幅和波相关系的明显表达式是非常复杂的，参閱 Stratton 的"电磁理論"第九章。

引起全偏振現象。

平面偏振光的反射和折射常常产生平面偏振光，但偏振方向一般說来不与入射光的相同。設 γ_0 为 $\mathbf{E}_0$ 方向与入射平面間的夹角，而 γ_1 和 γ_2 为反射波和折射波的类似角度，則利用(66.5)和(66.7)式，很容易得到下列关系式:

$$\operatorname{tg}\gamma_1=-\frac{\cos(\theta_0-\theta_2)}{\cos(\theta_0+\theta_2)}\operatorname{tg}\gamma_0,\qquad \operatorname{tg}\gamma_2=\cos(\theta_0-\theta_2)\operatorname{tg}\gamma_0, \tag{66.12}$$

只当 $\gamma_0=0$ 和 $\gamma_2=\frac{\pi}{2}$ 的明显情况下，对任何入射角，角 γ_0、γ_1、γ_2 才相等。当垂直入射 $(\theta_0=\theta_2=0)$ 和掠射 $\left(\theta_0=\frac{\pi}{2}\right)$ 时，它們也是相等(在掠射的情况，折射波一般不存在)。在其他情况下，从(66.12)式(考虑到 $0<\theta_0$, $\theta_2<\frac{\pi}{2}$，并假定 $0<\gamma_0<\frac{\pi}{2}$, $0<\gamma_1$, $\gamma_2<\pi$)得到不等式:

$$\gamma_1>\gamma_0,\qquad \gamma_2<\gamma_0.$$

由此可見，反射时 $\mathbf{E}$ 的方向偏离入射平面，而折射时偏向入射平面。

由比較(66.10)的两个公式看出，对任何入射角(除 $\theta_0=0$ 和 $\theta_2=\frac{\pi}{2}$ 以外)，

$$R_\parallel<R_\perp.$$

因此，例如当入射光为自然光时，反射光是部分偏振的，电場的优先取向垂直于入射面。折射光也是部分偏振的，但电場 $\mathbf{E}$ 的优先取向在入射平面內。

$R_\parallel$ 和 $R_\perp$ 与入射角的关系完全不相同。系数 $R_\perp$ 从 $\theta_0=0$ 时的值(66.8)开始，随着 θ_0 的增加而单調地增加。而系数 $R_\parallel$ 在 $\theta_0=0$ 时虽同样等于(66.8)式的值；但以后随 θ_0 的增加而开始减小，当 $\theta_0=\theta_p$ 时变为零，然后再开始单調地上升。

这时必須分别两种不同的情况。如果反射是从"光密"媒质发生的，也即是 $\varepsilon_2>\varepsilon_1$，則 $R_\parallel$ 和 $R_\perp$ 继續增加，一直到$\theta_0=\frac{\pi}{2}$(发生掠射)，这时两个系数等于 1。如果反射媒质是"光疏"媒质：$\varepsilon_2<\varepsilon_1$，則当入射角 $\theta_0=\theta_r$ 时，两个系数变为 1，这里的 θ_r 由下式得出：

$$\sin\theta_r=\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}=\frac{n_2}{n_1}, \tag{66.13}$$

称为全反射临界角。当 $\theta_0=\theta_r$ 时，折射角 $\theta_2=\frac{\pi}{2}$，也即是折射波的傳播平行于分界面。

当 $\theta_0>\theta_r$ 时，从光疏媒质的反射需要作特别的研究。在这种情况下，k_{2z} 是純虚数[参閱(66.2)式]，也即是在折射媒质內場是衰减的。若媒质內不存在眞吸收(也即是无能量耗散)，則波在媒质內部发生衰减表明，从第一媒质进入第二媒质的能通量平均为零(由簡单的計算容易直接证明，在第二媒质內的平均能通量矢量 $\overline{\mathbf{S}}$ 实际上只有 x 分量)。換句話說，全部入射到分界面上的能量都被反射回第一媒质內，也即是反射系数为

$$R_\perp=R_\parallel=1.$$

这种現象称为全反射[①]。上式中的 $R_\perp$ 和 $R_\parallel$ 等于 1，当然，也可以直接利用菲涅耳公式(66.4)和(66.6)来证明。

当 $\theta_0>\theta_r$ 时，$\mathbf{E}_1$ 和 $\mathbf{E}_0$ 間的比例系数变成$\frac{(a-ib)}{(a+ib)}$形式的复数，而 $R_\perp$ 和 $R_\parallel$ 由这些系数的模量的平方得出，这模量的平方等于 1。但是由这些公式，不但可以求出反射波內和入射波內的場的絕对值之比，而且也可以求出它們的波相差。为此，必須把它們写成

$$E_{1\perp}=e^{-i\delta_\perp}E_{0\perp},\quad E_{1\parallel}=e^{-i\delta_\parallel}E_{0\parallel}.$$

① 必須提到，从 ε 为实負数的媒质反射时，反射系数总是等于 1。在这种媒质內也不存在眞吸收，但波不能透入到媒质內部。

于是我們有①

$$\operatorname{tg}\frac{\delta_\perp}{2}=\frac{\sqrt{\varepsilon_1\sin^2\theta_0-\varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta_0},\quad \operatorname{tg}\frac{\delta_\parallel}{2}=\frac{\sqrt{\varepsilon_1(\varepsilon_1\sin^2\theta-\varepsilon_2)}}{\varepsilon_2\cos\theta_0}. \quad (66.14)$$

由此可見，全反射时波相发生改变，并且一般說来，对平行于和垂直于入射面的場分量各不相同。因此，在与入射面成一角度的平面內偏振化的波反射时，反射波将是橢圓偏振的②。对于波相差 $\delta=\delta_\perp-\delta_\parallel$，容易得到下列的表达式:

$$\operatorname{tg}\frac{\delta}{2}=\frac{\cos\theta_0\sqrt{\varepsilon_1\sin^2\theta_0-\varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_1}\sin^2\theta_0}. \quad (66.15)$$

只当 $\theta_0=\theta_r$ 和 $\theta_0=\frac{\pi}{2}$时，这波相差才为零。

例 題

1. 試求在全反射角附近反射系数变为 1 的定律。

解. 令 $\theta_0=\theta_r-\delta$，其中 δ 为一小量，并把(66.10)式內的 $\sin\theta_0$ 和 $\cos\theta_0$ 展开为 δ 的冪級数，結果得到

$$R_\perp=1-4\sqrt{2\delta}(n^2-1)^{-\frac{1}{4}},$$

$$R_\parallel=1-4\sqrt{2\delta}\,n^2(n^2-1)^{-\frac{1}{4}},$$

式中 $n^2=\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}>1$。导数$\frac{dR}{d\delta}$当 $\delta\to0$ 时随 $\delta^{-\frac{1}{2}}$变为无穷大。

2. 試求光綫从真空掠射到 ε 近于 1 的物体表面时的反射系数。

解. 由公式(66.10)給出相同的反射系数:

$$R_\perp\cong R_\parallel\cong\frac{(\varphi_0-\sqrt{\varphi_0^2+\varepsilon-1})^4}{(\varepsilon-1)^2},$$

式中 $\varphi_0=\frac{\pi}{2}-\theta_0$.

3. 試求波从真空入射到 ε 和 μ 不为 1 的媒质边界上的反射系数。

解. 由和正文內完全类似的計算，得到下面的結果:

---

① 如果 $\frac{a-ib}{a+ib}=e^{-i\delta}$，则 $\operatorname{tg}\frac{\delta}{2}=\frac{b}{a}$.

② 参閱“場論”第二版，§ 48。

$$R_{\perp}=\left|\frac{\mu\cos\theta_0-\sqrt{\varepsilon\mu-\sin^2\theta_0}}{\mu\cos\theta_0+\sqrt{\varepsilon\mu-\sin^2\theta_0}}\right|^2,$$

$$R_{\parallel}=\left|\frac{\varepsilon\cos\theta_0-\sqrt{\varepsilon\mu-\sin^2\theta_0}}{\varepsilon\cos\theta_0+\sqrt{\varepsilon\mu-\sin^2\theta_0}}\right|^2.$$

4. 設物质的平行平面层 2 位于真空（媒质 *1*）和任意媒质 *3* 之間。从真空內射到平行平面层上的光在入射平面內（或垂直于入射面）偏振化。試用光入射到半无限媒质 *2* 或 *3* 上的反射系数表示层的反射系数 R。

解：我們用 A_0 和 A_1 表示入射波和反射波內的場（**E** 或 **H**，視那一矢量平行于层平面而定）的振幅。层內的場包括折射波（振幅 A_2）和从 *2*—*3* 交界面上反射的波（振幅 A_2'）。由 *1*—*2* 表面上的边界条件得到下列等式：

$$A_2'=a(A_1-r_{12}A_0), \tag{1}$$

式中 a 和 r_{12} 为常数。从半无限媒质 *2* 反射时，波 A_2' 不存在，于是由(1)式得出 $r_{12}=A_1/A_0$，也即是 r_{12} 是这种情况下的反射振幅。由(1)式，交换 A_1 和 A_0，并用 A_2 代替 A_2'，还可得到一个方程，这相当于波矢量的 z 分量改变正負号：

$$A_2=a(A_0-r_{12}A_1), \tag{2}$$

在媒质 *3* 內只有一种波（透射波）。这种波的振幅 A_3 满足下列条件：

$$A_2e^{i\psi}=aA_3, \qquad A_2'e^{-i\psi}=-ar_{32}A_3 \tag{3}$$

[类似于 $A_1=0$ 时的条件(1)和(2)]；指数因子已計及在层厚度 h 上的波相变化，而且

$$\psi=\frac{\omega}{c}h\sqrt{\varepsilon_2-\sin^2\theta_0}. \tag{4}$$

从(3)式消去 A_3，我們得到

$$A_2'e^{-i\psi}=r_{23}A_2e^{i\psi} \tag{5}$$

$(r_{23}=-r_{32})$.

由(1)，(2)，(5)式，我們求得从层反射的振幅为

$$r=\frac{A_1}{A_0}=\frac{r_{12}e^{-2i\psi}+r_{23}}{e^{-2i\psi}+r_{12}r_{23}} \tag{6}$$

（反射系数 $R=|r|^2$），常数 r_{23} 的意义可从下列事实說明，当 $h=0$ 时，r 必須等于从半无限媒质 *3* 的反射振幅 r_{13}；由此求得

$$r_{23}=\frac{r_{12}-r_{13}}{r_{12}r_{13}-1}. \tag{7}$$

由公式(6)和(7)，就可以得到所提出的問題的解。应着重指出的是，它們的推导与对媒质 *2* 和 *3* 的性质所作的任何假定无关，这些媒质可以是透明的，

也可以是吸收的。

如果媒质 *2* 和 *3* 是透明的，則 ψ, r_{12}, r_{13} 都为实数，而 r_{23} 为半无限媒质 *2* 和 *3* 的交界面上的反射振幅。这时由(6)式，我們得到

$$R=\frac{(r_{12}+r_{23})^2-4r_{12}r_{23}\sin^2\psi}{(r_{12}r_{23}+1)^2-4r_{12}r_{23}\sin^2\psi}. \tag{8}$$

ψ 变化时，R 的变化范圍为

$$\left(\frac{r_{12}+r_{23}}{r_{12}r_{23}+1}\right)^2 \text{和} \left(\frac{r_{12}-r_{23}}{r_{12}r_{23}-1}\right)^2.$$

当光綫垂直入射时，$r_{12}=\frac{n_1-n_2}{n_1+n_2}$，对 r_{13} 和 r_{23}，有类似的关系式。如果 $n_2^2=$ $=n_1n_3$，則 $r_{12}=r_{23}$，由适当选擇层的厚度，R 可以变为零。

若媒质 *3* 是真空，則 $r_{13}=0$, $r_{23}=-r_{12}$，并从(6)，我們得到

$$r=\frac{r_{12}(e^{-2i\psi}-1)}{e^{-2i\psi}-r_{12}^2}=\frac{\operatorname{sh} i\psi}{\operatorname{sh}[i\psi+\ln(-r_{12})]}. \tag{9}$$

如果这时媒质 *2* 是透明的，則

$$R=\frac{4R_{12}\sin^2\psi}{(1-R_{12})^2+4R_{12}\sin^2\psi}.$$

只当媒质 *2* 是透明的，层的透射系数 D（从真空到真空）才等于 $1-R$。在相反的情况下，要計算 D 必須根据(1)—(3)式，令其中 $r_{32}=r_{12}$。于是“透射振幅” d 等于

$$d=\frac{A_3}{A_0}=\frac{1-r_{12}^2}{e^{-i\psi}-r_{12}^2e^{i\psi}}, \tag{10}$$

而透射系数 $D=|d|^2$.

5. 試求光綫垂直入射到复介电常数 ε 为很大的薄板上的反射系数和透射系数。

解. 在这种情况下，

$$r_{12}=\frac{1-\sqrt{\varepsilon}}{1+\sqrt{\varepsilon}}\approx-\left(1-\frac{2}{\sqrt{\varepsilon}}\right),$$

而且按照前一例題的公式(9)

$$r=-\frac{1}{1-(2/\sqrt{\varepsilon})\operatorname{cth} i\psi}, \quad \psi=\frac{\omega}{c}h\sqrt{\varepsilon}.$$

如果板很薄，因而 $h\omega/c\ll1/\sqrt{|\varepsilon|}$，則可以写为

$$r=-\frac{1}{1+(2ic/\varepsilon\omega h)}.$$

这时还可以分别两种情况:

$$当\ \frac{1}{|\varepsilon|}\ll\frac{\omega}{c}h\ll\frac{1}{\sqrt{|\varepsilon|}},\qquad R=1-\frac{4c}{\omega h}\frac{\varepsilon''}{|\varepsilon|^2},$$

$$当\ \frac{\omega}{c}h\ll\frac{1}{|\varepsilon|},\qquad R=\frac{\omega^2h^2}{4c^2}|\varepsilon|^2.$$

按照公式(10),得到透射系数为

$$当\ \frac{\omega}{c}h\sim\frac{1}{\sqrt{|\varepsilon|}},\qquad d=\frac{2}{\sqrt{\varepsilon}\,\mathrm{sh}i\psi},$$

$$当\ \frac{\omega}{c}h\ll\frac{1}{\sqrt{|\varepsilon|}},\qquad d=\frac{2}{1-i\varepsilon\omega h/2c}.$$

在后一种情况下,可以再区分两种情况:

$$\frac{1}{|\varepsilon|}\ll\frac{\omega}{c}h\ll\frac{1}{\sqrt{|\varepsilon|}},\qquad D=\frac{4c^2}{\omega^2h^2|\varepsilon|^2}$$

$$\frac{\omega}{c}h\ll\frac{1}{|\varepsilon|},\qquad D=1-\frac{\varepsilon''\omega h}{c}.$$

§ 67. 金屬的表面阻抗

在不十分高的频率下,金屬的介电常数的絕对値大于 1(当 $\omega\to0$ 时,介电常数随$\frac{1}{\omega}$趋近于无穷大)。在这些条件下,金屬內的"波長"$\delta\sim\frac{c}{\omega}\sqrt{|\varepsilon|}$①小于眞空內的波長 $\lambda\sim\frac{c}{\omega}$。如果这时、$\delta$(但不一定是 λ)也小于金屬表面的曲率半徑,則可以利用这种情况来使任意电磁波从金屬上反射的問題得到大大的簡化。

δ 很小表明,在金屬內表面法綫方向的場分量的导数大于切綫方向的导数。因此,金屬內表面附近的場可以认为是平面波場,因而 $\mathbf{E}_t$ 和 $\mathbf{H}_t$ 的关系式为

$$\mathbf{E}_t=\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}[\mathbf{H}_t\mathbf{n}],\tag{67.1}$$

① 很大的$\sqrt{\varepsilon(\omega)}$值实际上常常是复数。这时电磁場在物体內发生衰减,因而物体內的波長同时也即是場的"透入深度"。如果把 $\varepsilon(\omega)$ 表示为电导率 σ [按照(58.9)],則这个量和 § 45 所引入的透入深度相等。

式中 $\mathbf{n}$ 为表面的法綫，方向指向金屬內部。另一方面，因为 $\mathbf{E}_t$ 和 $\mathbf{H}_t$ 为連續的，因而在金屬外表面附近的場值也必須有相同的关系式。(67.1)式可以取作为求金屬外的場的边界条件(如 M. A. 列安托維奇曾指出的，1948)。由此可見，求解外电磁場的問題可以完全不考虑金屬內的場。

量$\sqrt{\left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)}$称为金屬的表面阻抗；我們把它表示为 $\zeta=\zeta'+i\zeta''$①：

$$\zeta=\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}. \tag{67.2}$$

在用通常的金屬电导率可以表示 ε 的頻率区域內，我們有.

$$\zeta=(1-i)\sqrt{\frac{\omega\mu}{8\pi\sigma}}. \tag{67.3}$$

通过金屬表面的能通量对时間的平均值为

$$\overline{\mathbf{S}}=\frac{c}{8\pi}\mathrm{Re}[\mathbf{E}_t\mathbf{H}_t^*]=\frac{c\zeta'}{8\pi}|\mathbf{H}_t|^2\mathbf{n}. \tag{67.4}$$

这能通量代表从外面流入金屬內并在金屬內所耗散的能量。由此看出，特别是必須

$$\zeta'>0. \tag{67.5}$$

由这个不等式决定了(67.2)式的根的正負号

当頻率增加时，透入深度 δ 变成和傳导电子的自由路程长度 l 同数量級②。在这种情况下，場的空間不均匀性使得我們不能利用介电常数 ε 来对場作宏观描写(与这有关的現象的存在，是由 H. 倫敦最先指出的 1940) 值得注意的是，这时$\frac{v}{l}\gg\omega$ 的条件倘

① 通常把与 ζ 相差一个因子 $4\pi/c$ 的量称为表面阻抗；但是我們发现采用这种符号是不方便的。

② 自由路程長度主要依賴于金屬的温度。实际上这通常是指氦范圍內的很低温度，而我們所研究的現象发生在无綫电超短波波段內。

未被破坏(v 为傳导电子的速度)，这条件保证了电导率不存色散，而对于恒定电流，它仍然等于 σ。

重要的是，下列边界条件

$$\mathbf{E}_t=\zeta[\mathbf{H}_t\mathbf{n}] \tag{67.6}$$

在这些频率下也仍然是正确的。这时金屬內表面附近的場也仍然可以視为平面波，虽然它現在已不能再用通常的麦克斯韦宏观方程来描写 在这种波內，場 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{H}$ 的关系必須是綫性关系，而軸矢量 $\mathbf{H}$ 和极矢量 $\mathbf{E}$ 之間的唯一可能的綫性关系的形式为(67.6)式。这关系式內的系数 ζ 是表征金屬性质的唯一的量，在求解外电磁場問題时必須知道它。

当頻率再增加时(通常在紅外区域內)，場的宏观描写又变成可能，并且 ε 的概念又有意义。这現象的原因在于，傳导电子在吸收量子 $\hbar\omega$ 以后得到大量的能量，結果它的平均自由路程減小，于是不等式 $l\ll\delta$ 又被滿足。阻抗 ζ 重新变成与 $\sqrt{\varepsilon}$ 成反比[①]。在这个頻率区域內，$\varepsilon(\omega)$ 的实数部分是負的，而它的虛数部分很小。不等式 $l\ll\delta$ 是 ε' 和 ε'' 具有宏观意义的条件。但是为了使只是大的 ε' 值有宏观意义，只要滿足更弱的条件 $\frac{v}{\omega}\ll\delta$ 就行了，其中的 v 为金屬內傳导电子的速度(滿足这个条件时，研究电子的运动就可以略去場的空間不均匀性)。

在任何情况下，对阻抗的实数部分，不等式 $\zeta'>0$ 总是滿足的。如果公式(67.2)有效，则对 ζ 的虛数部分的正負号也可以作出一些判断。例如，如果 ε 的色散比 μ 的色散重要(也即是可以視

---

① 但是应該記住，利用等式(67.6)作为边界条件，只当 $|\varepsilon|$ 很大(即 ζ 很小)时才可以。在光学頻率內，这条件不能滿足。我們假定 $\mu\sim1$；于是大的 $|\varepsilon|$ 相应于小的 ζ，我們指出，如果 $\mu\gg1$，則利用边界条件(67.6)时必須不等式 $\delta\ll\lambda$ 滿足，这表明必須 $\sqrt{\mu\varepsilon}\gg1$ 这时 $\zeta=\sqrt{\mu/\varepsilon}$ 可以不很小。

μ 为实数)，則从 $\varepsilon''>0$ 得出 $\zeta'\zeta''<0$，因为常常 $\zeta'>0$，因而

$$\zeta''<0.$$

这是最通常的情况。如果 ζ 的色散由 μ 的色散来决定，則由相同的方式可以证明 $\zeta''>0$。

阻抗的概念也可以应用到超导体上。超导体的特征是：甚至在静态情况($\omega=0$)下，也存在小的透入深度 δ。在不大高的頻率下，可以假定磁場分布和静态时的相同。为了求出电場，我們写出方程：

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}=i\frac{\omega}{c}\mathbf{H}.$$

选擇 z 軸方向为超导体面的外法綫方向。与大的 z 的导数比較，可以略去切綫方向的导数，于是我們有

$$\frac{\partial E_x}{\partial z}=i\frac{\omega}{c}H_y$$

(对 E_y 有类似的式子)。将这等式对物体内的深度 z 进行积分：

$$E_x(0)=\frac{i\omega}{c}\int_{-\infty}^{0}H_y dz;$$

$E_x(0)$ 是 $z=0$ 时 E_x 的值，也即是 E_x 在物体面上的值。我們定量地定义透入深度如下：

$$\int_{-\infty}^{0}H_y dz=H_y(0)\delta. \qquad (67.7)$$

于是

$$E_x(0)=\frac{i\omega}{c}H_y(0)\delta.$$

与(67.6)形式的边界条件比較，我們发現超导体的阻抗(在頻率不十分高的頻率区域内[①])由下式給出：

① 实际上是指差不多达到厘米波段的頻率。

$$\zeta = -i\frac{\omega}{c}\delta. \tag{67.8}$$

这式子是 $\zeta(\omega)$展开为頻率的冪級数的第一項，因此对于超导体，展开式从与 ω 成比例的項开始。展开式以下的一項与 ω^2 成正比，而且是实数；这是 ζ' 的展开式的第一項。

阻抗 $\zeta(\omega)$可視为复变数 ω 的函数，它的性质在許多方面类似于函数 $\varepsilon(\omega)$的性质(B. Л. 金茲堡, 1954)。边界条件，对于单色波具有(67.6)的形式，在普遍情况下，必須理解为算符关系式：

$$\mathbf{E}_t = \hat{\zeta}[\mathbf{H}_t\mathbf{n}], \tag{67.9}$$

它使某一时刻的 $\mathbf{E}_t$ 值用以前时刻的 $\mathbf{H}_t$ 值来表示(比較 § 58)。如在 § 62 中一样，由此得出，函数 $\zeta(\omega)$在 ω 的上半平面內(其中包括实軸，但 $\omega=0$ 的点除外)无奇点。其次，由 $\mathbf{H}_t$ 为实数时 $\mathbf{E}_t$ 为实数的条件得到关系式：

$$\zeta(-\omega^*) = \zeta^*(\omega).$$

最后，因为能量耗散由函数 $\zeta(\omega)$的实数部分决定(而不是由虛数部分，如对函数 $\varepsilon(\omega)$一样)，因而 $\zeta'(\omega)$是正的，而且 ω 为任何实值时都不会变为零，除了 $\omega=0$ 的值外。由和 § 62 类似的討論，可以作出結論，在整个上半平面內，

$$\mathrm{Re}\,\zeta(\omega) > 0.$$

由此特别得出 $\zeta(\omega)$在上半平面內无零点。

$\zeta(\omega)$在上半平面內无奇点再一次导至克拉梅斯-克朗尼公式，这时特别重要的公式是

$$\zeta''(\omega) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\zeta'(x)-1}{x-\omega}dx.$$

利用 $\zeta'(x)$的偶数性，可以把它改写为

$$\zeta''(\omega) = -\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\zeta'(x)-1}{x-\omega}dx + \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\zeta'(x)-1}{x+\omega}dx,$$

或者

$$\zeta''(\omega) = -\frac{2\omega}{\pi}\int_0^\infty \frac{\zeta'(x)}{x^2-\omega^2}dx \qquad (67.10)$$

(被积式的分子內的 1 可以略去，因为$\frac{1'}{(x^2-\omega^2)}$的积分的主值总是为零)。

上面对函数 $\zeta(\omega)$ 所作的討論，当然在同样程度上也适用于逆函数$\frac{1}{\zeta(\omega)}$；算符 $\hat{\zeta}^{-1}$ 用$\mathbf{E}_t$ 表示$[\mathbf{H}_t\mathbf{n}]$。特别是(67.10)式变为

$$[\zeta^{-1}(\omega)]'' = -\frac{2\omega}{\pi}\int_0^\infty \frac{[\zeta^{-1}(x)]'}{x^2-\omega^2}dx. \qquad (67.11)$$

当 ζ 很小时，这个公式比(67.10)式更便于应用。但是在上述的形式下，它不能应用于超导体，在超导体內，按照(67.8)式，当 $\omega=0$ 时，ζ^{-1} 有一极点。簡单地改变一下推导［类似于由(62.9)变为(62.11)］，这时得到下面的公式：

$$[\zeta^{-1}(\omega)]'' = -\frac{2\omega}{\pi}\int_0^\infty \frac{[\zeta^{-1}(x)]'}{x^2-\omega^2}dx + \frac{c}{\omega\delta}. \qquad (67.12)$$

末了，举出应用阻抗概念的一个例子，我們来研究平面电磁波从眞空入射到表面阻抗为 ζ 的金屬平面上的反射現象。如果矢量 $\mathbf{E}$ 垂直于入射面而偏振化，則由边界条件(67.6)給出

$$E_0+E_1=\zeta(H_0-H_1)\cos\theta_0=\zeta(E_0-E_1)\cos\theta_0$$

(符号和 §66 內相同)。由此考虑到 ζ 很小，我們有

$$\frac{E_1}{E_0} = -(1-2\zeta\cos\theta_0),$$

和反射系数为

$$R_\perp = 1-4\zeta'\cos\theta_0. \qquad (67.13)$$

如果 $\mathbf{E}_0$ 在入射平面內，則边界条件可以写为 $\zeta\mathbf{H}_t=[\mathbf{n}\mathbf{E}_t]$，也即是

$$\zeta(H_0+H_1)=(E_0-E_1)\cos\theta_0=(H_0-H_1)\cos\theta_0,$$

由此得到反射系数为

$$R_{\parallel}=\left|\frac{\cos\theta_0-\zeta}{\cos\theta_0+\zeta}\right|^2. \tag{67.14}$$

当入射角不很接近于$\frac{\pi}{2}$时，

$$R_{\parallel}=1-\frac{4\zeta'}{\cos\theta_0}. \tag{67.15}$$

如果$\varphi_0=\frac{\pi}{2}-\theta_0\ll1$, 則

$$R_{\parallel}=\left|\frac{\varphi_0-\zeta}{\varphi_0+\zeta}\right|^2. \tag{67.16}$$

这式子当$\varphi_0=|\zeta|$时有一极小値为

$$R_{\parallel}=(|\zeta|-\zeta')/(|\zeta|+\zeta').$$

除了(67.16)的特殊情況外，对ζ很小的表面，反射系数接近于1。$\zeta\to0$的表面为“理想导电”面，同时也是“理想反射面”。在这种面上的边界条件簡单地为$\mathbf{E}_t=0$，它和导体面上靜电場的边界条件相似。但是和恒定电場的情况不同，在交变場內，这条件的滿足自动地导至对磁場的一定条件也得到滿足。即是由于方程$(i\omega/c)\mathbf{H}=\mathrm{rot}\mathbf{E}$，从表面上$\mathbf{E}_t=0$，得到等式$H_n=0$。由此可見，在交变电磁場内，在“理想导电”面上，磁場的法向分量变为零。在这种意义上，这种表面类似于恒定磁場内的超导体面。

例 題

試求从小阻抗的平面发出的(一定频率的)热輻射强度。

解. 按照克希霍夫定律，从任何表面射到立体角元do內的热輻射强度dI与絕对黑体表面的輻射强度dI_0的关系为$dI=(1-R)dI_0$，式中R为該表面对自然光的反射系数。利用公式(67.13)和(67.14)算出$R=\frac{1}{2}(R_{\perp}+$

$+R_1$)，并考虑到从絕对黑体表面的輻射是各向同性的 $\left(dI_0=I_0\frac{do}{2\pi}\right)$，于是我們得到

$$I=2I_0\zeta'\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{1+\frac{1}{\cos^2\theta+2\zeta'\cos\theta+\zeta'^2+\zeta''^2}\right\}\cos\theta\sin\theta\,d\theta.$$

进行积分并略去 ζ 的高次項后，我們求得

$$\frac{I}{I_0}=\zeta'\left[\ln\frac{1}{\zeta'^2+\zeta''^2}+1-\frac{2\zeta'}{\zeta''}\operatorname{arctg}\frac{\zeta''}{\zeta'}\right].$$

特別是对于阻抗由(67.3)式求出的金屬而言，我們有($\mu=1$)

$$\frac{I}{I_0}=\sqrt{\frac{\omega}{8\pi\sigma}}\left[\ln\frac{4\pi\sigma}{\omega}+1-\frac{\pi}{2}\right].$$

§68. 波在不均匀媒质內的傳播

我們現在来研究电磁波在电学不均匀但各向同性的媒质內的傳播現象①。在麦克斯韦方程

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}=\frac{i\omega}{c}\mathbf{H},\qquad \operatorname{rot}\mathbf{H}=-i\varepsilon\frac{\omega}{c}\mathbf{E}$$

內(我們处处令 $\mu=1$)，ε 是点的坐标的函数。将第一式內的 $\mathbf{H}$ 代入第二式內，得到 $\mathbf{E}$ 的方程为

$$\Delta\mathbf{E}+\frac{\varepsilon\omega^2}{c^2}\mathbf{E}-\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{E}=0. \tag{68.1}$$

消去 $\mathbf{E}$ 后，得到 $\mathbf{H}$ 的方程为

$$\Delta\mathbf{H}+\frac{\varepsilon\omega^2}{c^2}\mathbf{H}+\frac{1}{\varepsilon}[\nabla\varepsilon\cdot\operatorname{rot}\mathbf{H}]=0. \tag{68.2}$$

在“一維”情况下，ε 只在空間內的一个方向变化，使得这些方程可以大为簡化。选擇这方向为 z 軸，并且我們研究傳播方向在 xz 平面內的波。在这种波內全部的量都与 y 坐标无关，而且由于在 x 軸方向媒质是均匀的，因而我們可以只須研究与 x 的关系，这

① 关于各向异性媒质內的波傳播現象，参閱 Я. Л. Альперт. В. Л. Гинзбург и Е. Л. Фрейнберг 的书“无綫电波的傳播”，M.—Л.，1953。

关系由因子 $e^{i\kappa x}$ 給出，其中 κ 为常数。当 $\kappa=0$ 时，場只与 z 有关，也即是說波"垂直地"透射过 $\varepsilon=\varepsilon(z)$ 的物质层。如果 $\kappa\neq0$，則就說波傾斜透射。

这时必須分別(当 $\kappa\neq0$)两种独立的偏振情况。在一种情况下，矢量 $\mathbf{E}$ 垂直于波的傳播平面（也即是沿 y 軸方向），而磁場 $\mathbf{H}$ 也相应地在这平面內。于是方程(68.1)变为

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2}+\left(\varepsilon\frac{\omega^2}{c^2}-\kappa^2\right)E=0. \tag{68.3}$$

在另一种情况下，場 $\mathbf{H}$ 在 y 軸方向，而 $\mathbf{E}$ 在傳播平面內。在这种情况下，从(68.2)式出发更为方便，由它得到

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial H}{\partial z}\right)+\left(\frac{\omega^2}{c^2}-\frac{\kappa^2}{\varepsilon}\right)H=0. \tag{68.4}$$

我們将約定分別称这两种类型的波为 E 波和 H 波。

当傳播条件接近于几何光学条件时，在这种重要情况下，这些方程可以在普遍形式下解出。下面我們假定函数 $\varepsilon(z)$ 为实数①。在(68.3)式內，$2\pi/\sqrt{f}$ 为 z 軸方向的"波长"，其中

$$f(z)=\varepsilon k^2-\kappa^2.$$

几何光学近似相应于不等式：

$$\frac{d}{dz}\frac{1}{\sqrt{f}}\ll1, \tag{68.5}$$

而(68.3)式的两个独立解的形式为

$$\frac{\text{常数}}{f^{1/4}}e^{\pm i\int\sqrt{f}\,dz}. \tag{68.6}$$

条件(68.5)在 $f=0$ 的点附近（如果存在这样的点）显然被破坏。我們設这一点为 $z=0$，而且当 $z<0$ 时 $f>0$，而 $z>0$ 时 $f<0$。

① 方程(68.3)在形式上和量子力学中粒子的一維运动的薛丁格方程相似，而几何光学近似相当于准古典情况。下面我們写出最后的結果，对于它們的推导过程，請参閱量子力学課程（参閱"量子力学"第七章）。

在离开 $z=0$ 的点两側相当远处，(68.3)式的解为(68.6)的形式，但是要在 $z>0$ 和 $z<0$ 的区域內建立这个解内的系数之間的关系，必須研究(68.3)式在 $z=0$ 附近的精确解。在这点附近，函数 $f(z)$ 可以展开为 z 的幂級数，并写为 $f=-\alpha z$ 的形式。于是方程

$$\frac{d^2E}{dz^2}-\alpha zE=0$$

的解为

$$E=\frac{A}{\alpha^{1/6}}\Phi(\alpha^{\frac{1}{3}}z), \tag{68.7}$$

它对所有的 z 值都是有限的，式中

$$\Phi(\xi)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\cos\left(\frac{u^3}{3}+u\xi\right)du$$

称为埃里(Airy)函数(我們处处略去 E 內的因子 $e^{-i\omega t+i\kappa x}$)。当 $|z|$ 很大时，(68.3)式的解的漸近形式为

$$E=\frac{A}{f^{\frac{1}{4}}}\cos\left(\int_0^z\sqrt{f}\,dz+\frac{\pi}{4}\right),\quad 当\ z<0,$$

或　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　(68.8)

$$E=\frac{A}{2|f|^{1/4}}e^{-\int_0^z\sqrt{|f|}\,dz},\quad 当\ z>0,$$

系数 A 和(68.7)式內的相同。这些式子中的第一式代表从 z 軸正方向入射的波和从平面 $z=0$ 上反射的波所疊加而得到的駐波。这些波的振幅相同(等于 $A/2f^{1/4}$)，也即是反射系数等于1。只有指数式衰減的場透入到 $z>0$ 的区域。

在趋近反射点时，如从(68.8)式分母內存在因子 $f^{\frac{1}{4}}$ 所表明的，波的振幅增加。但是要求出这点紧邻近的場值必須利用(68.7)式。这个函数在 $z>0$ 的区域內部单調地衰減，而在 $z<0$ 的区域內則是振蕩的，而且 $|E|$ 的极大值逐漸地減小。当 $\alpha^{\frac{1}{3}}z=-1.02$

时达到第一个最大的极大値，幷等于

$$E=0.949\cdot A\alpha^{-\frac{1}{6}}.$$

到此为止，我們写出了E波的解。容易看出，在几何光学近似內，对于H波也可以写出完全相似的公式。如果在(68.4)式內代入 $H=u\sqrt{\varepsilon}$，則所出現的ε的导数为与u相乘，而不是与u'相乘，然后略去含有这些导数的項［由于条件(68.5)，这些項很小］，于是得到函数$u(z)$的方程为

$$\frac{d^2u}{dz^2}+\left(\frac{\varepsilon\omega^2}{c^2}-\kappa^2\right)u=0,$$

这个方程和(68.3)式相同。所以，H的全部公式与(68.6)—(68.8)式只是相差一个因子$\sqrt{\varepsilon}$。

当傾斜入射的波($\kappa\neq 0$)从物质层反射时［其中$\varepsilon(z)$通过零点］，两种波的行为发生重大的差别。这时波从$f(z)=\varepsilon k^2-\kappa^2=0$的平面上反射，也即是“不能到达”$\varepsilon=0$的点处。$E$波只以指数式衰减場的形式透过这平面外。而当$H$波在这种衰减場的总本底上反射时，在$\varepsilon=0$的点附近場剧烈地加强(参閱本节例題1)①。

例　　題

1. 試求傾斜入射($\kappa\neq 0$)的H波反射时在$\varepsilon=0$的点附近的电場。

解. 設在$z=0$的点处$\varepsilon=0$；在这点附近，我們写出$\varepsilon=az$，于是(68.4)式变为

$$\frac{d^2H}{dz^2}-\frac{1}{z}\frac{dH}{dz}+(ak^2z-\kappa^2)H=0.$$

按照綫性微分方程的普遍理論，这方程的一个解(我們令它为$H_1(z)$)在$z=0$处无奇点，而把它展开为z的冪級数的第一項为z^2：

$$H_1(z)=z^2+\frac{\kappa^2}{8}z^4-\frac{ak^2}{15}z^5+\cdots$$

① 应注意的是，这一个点是(66.4)式的奇点，因此在这一点附近，几何光学近似不能应用，尽管$f(z)$不变为零和条件(66.5)不被破坏。

第二个独立解具有对数奇点，而它的展开式为

$$H_2(z)=H_1(z)\ln(\kappa z)+\frac{2}{\kappa^2}-\frac{2k^2a}{3\kappa^2}z^3+\cdots$$

場 $H(z)$ 由这两个解构成，因此当 $z\to0$ 时趋近于常数（我們把它表示为 H_0）。电場分量內的主要項为

$$E_x=-\frac{i}{\varepsilon k}\frac{\partial H}{\partial z}\cong-\frac{i\kappa^2H_0}{ak}\ln(\kappa z),$$

$$E_z=\frac{i}{\varepsilon k}\frac{\partial H}{\partial x}=-\frac{\kappa}{\varepsilon k}H\cong-\frac{\kappa H}{ak}\frac{1}{z},$$

也即是当 $z\to0$ 时变为无穷大。当然，实际上由于媒质內必然存在小的吸收（也即是 ε 的虛数部分不为零），因此場只能达到比較大（与周圍的弱本底比較）而有限的数值。

2. 設"表面"H 波沿两种媒质的分界面而傳播，这两种媒质的介电常数分别为 ε_1 和 $-|\varepsilon_2|$，这波在两种媒质內部傳播时发生衰減。試求这种波的頻率与波矢量的关系式。

解. 选擇分界面为 xy 平面，波沿 x 軸方向傳播，而場 $\mathbf{H}$ 与 y 軸平行。設上半空間 $z>0$ 被正介电常数 ε_1 的媒质所充滿，而下半空間 $z<0$ 被負介电常数 ε_2 的媒质所充滿。我們求得 $z\to\pm\infty$ 时衰減的波內的場为

$$H_1=H_0e^{ikx-\kappa_1z},\qquad \kappa_1=\sqrt{k^2-\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_1},\qquad \text{当 } z>0,$$

$$H_2=H_0e^{ikx+\kappa_2z},\qquad \kappa_2=\sqrt{k^2+\frac{\omega^2}{c^2}|\varepsilon_2|},\qquad \text{当 } z<0,$$

其中 k,κ_1,κ_2 为实数。$H_y=H$ 为連續的边界条件已被滿足，而由 E_x 为連續的条件給出

$$\frac{1}{\varepsilon_1}\frac{\partial H_1}{\partial z}=\frac{1}{\varepsilon_2}\frac{\partial H_2}{\partial z},\qquad \text{当 } z=0.$$

或 $\frac{\kappa_1}{\varepsilon_1}=\frac{\kappa_2}{|\varepsilon_2|}$。只当

$$\varepsilon_1<|\varepsilon_2|$$

（当然 $\varepsilon_1\varepsilon_2<0$）时，这等式才被滿足。这时 k 和 ω 的关系式为

$$k^2=\frac{\omega^2\varepsilon_1|\varepsilon_2|}{c^2(|\varepsilon_2|-\varepsilon_1)}.$$

容易证明，"表面"E 波的傳播一般是不可能的。

§69. 互易定理

描写任意媒质内細导綫源所发射的电磁波，是利用下列方程：

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{E}=i\frac{\omega}{c}\mathbf{B},\qquad \mathrm{rot}\,\mathbf{H}=-i\frac{\omega}{c}\mathbf{D}+\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}_{外}\tag{69.1}$$

式中 $\mathbf{J}_{外}$ 为导綫内流过的“外来”(对媒质而言)周期电流密度。

設媒质内有两个不同的源（頻率相同）。我們用下角标1和2表示由这两个源分别产生的場。媒质可以是不均匀的和各向异性的。下面对媒质的性质所作的唯一假定是满足綫性关系：$D_i=$ $=\varepsilon_{ik}E_k$, $B_i=\mu_{ik}H_k$, 其中 ε_{ik} 和 μ_{ik} 为对称張量。在这些条件下，可以导出联系两个源的場和其中外电流的关系式。

我們分别用 $\mathbf{H}_2$ 和 $\mathbf{E}_2$ 乘下列二个方程：

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{E}_1=ik\mathbf{B}_1,$$

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{H}_1=-ik\mathbf{D}_1+\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}_{外}^{(1)},$$

并用 $-\mathbf{H}_1$ 和 $-\mathbf{E}_1$ 乘 $\mathbf{E}_2$ 和 $\mathbf{H}_2$ 的相同的方程。把这些方程相加以后，我們得到

$$(\mathbf{H}_2\,\mathrm{rot}\,\mathbf{E}_1-\mathbf{E}_1\,\mathrm{rot}\,\mathbf{H}_2)+(\mathbf{E}_2\,\mathrm{rot}\,\mathbf{H}_1-\mathbf{H}_1\,\mathrm{rot}\,\mathbf{E}_2)=$$

$$=i\frac{\omega}{c}(\mathbf{B}_1\mathbf{H}_2-\mathbf{H}_1\mathbf{B}_2)+i\frac{\omega}{c}(\mathbf{E}_1\mathbf{D}_2-\mathbf{D}_1\mathbf{E}_2)+$$

$$+\frac{4\pi}{c}(\mathbf{j}_{外}^{(1)}\mathbf{E}_2-\mathbf{j}_{外}^{(2)}\mathbf{E}_1).$$

但 $\mathbf{B}_1\mathbf{H}_2=\mu_{ik}H_{ik}H_{2i}=\mathbf{H}_1\mathbf{B}_2$, $\mathbf{E}_1\mathbf{D}_2=\mathbf{D}_1\mathbf{E}_2$, 于是等式右側的头两項变为零。左側按照熟知的矢量分析公式变换后，我們得到

$$\mathrm{div}\{[\mathbf{E}_1\mathbf{H}_2]-[\mathbf{E}_2\mathbf{H}_1]\}=\frac{4\pi}{c}(\mathbf{j}_{外}^{(1)}\mathbf{E}_2-\mathbf{j}_{外}^{(2)}\mathbf{E}_1).$$

我們将上式对全部空間积分；于是等式左側的积分变换成对无穷远表面的积分，因而变为零。因此，我們得到

$$\int \mathbf{j}_{\text{米}}^{(1)}\mathbf{E}_2 dV_1 = \int \mathbf{j}_{\text{米}}^{(2)}\mathbf{E}_1 dV_2. \tag{69.2}$$

左側和右側的积分分別对第一源和第二源的体积进行，因为只在这些体积內电流 $\mathbf{j}_{\text{米}}^{(1)}$ 和 $\mathbf{j}_{\text{米}}^{(2)}$ 才不为零。由于导綫很細，其中一导綫对另一导綫的場的影响，可以忽略不計，因此，(69.2)內的 $\mathbf{E}_1$ 和 $\mathbf{E}_2$ 分別代表第一源和第二源的輻射場，为每一源在另一源的位置上所产生的，仿佛后者这时不存在。公式(69.2)也即为所求的关系式，称为互易定理。

如果源的綫度小于波长，也小于它們的相互距离，則互易定理的表达式可以簡化。每一源的場在另一源的綫度范圍內变化很小，因而在(69.2)式內，可以将 $\mathbf{E}_1$ 和 $\mathbf{E}_2$ 移到积分号外，簡单地把它們写为 $\mathbf{E}_1(2)$ 和 $\mathbf{E}_2(1)$，其中 1 和 2 表示两源的位置：

$$\mathbf{E}_2(1)\int \mathbf{j}_{\text{米}}^{(1)} dV_1 = \mathbf{E}_2(2)\int \mathbf{j}_{\text{米}}^{(2)} dV_2.$$

积分 $\int \mathbf{j}_{\text{米}} dV$ 不是别的，乃是源的总偶极矩 $\mathscr{P}$ 对时間的导数。因为 $\dot{\mathscr{P}} = -i\omega\mathscr{P}$，因而最后得到

$$\mathbf{E}_2(1)\mathscr{P}_1 = \mathbf{E}_1(2)\mathscr{P}_2. \tag{69.3}$$

这种形式的互易定理当然只能应用于偶极子的輻射。若源的偶极矩等于零(或者异常小)，則从普遍公式(69.2)变换到(96.3)所作的近似，是不充分的(参閱本节的例題 1)。

例　　題

1. 試导出四极子輻射源和磁偶极子輻射源的互易定理。

解. 如果 $\int \mathbf{j}_{\text{米}} dV = 0$，則在(69.2)的积分內，必須取展开式內以下的項：

$$\int \mathbf{j}_1\mathbf{E}_2 dV_1 \cong \frac{\partial E_{2i}}{\partial x_k}\int x_k j_{1i} dV_1 = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial E_{2i}}{\partial x_k}+\frac{\partial E_{2k}}{\partial x_i}\right)\times$$
$$\times\int (x_k j_{1i}+x_i j_{1k}) dV_1 + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial E_{2i}}{\partial x_k}-\frac{\partial E_{2k}}{\partial x_i}\right)\int (x_k j_{1i}-x_i j_{1k}) dV_1$$

(为简单起見，已略去 $\mathbf{j}$ 上的下角标"外"字)。我們引进四极矩張量和磁矩矢量为

$$\dot{D}_{ik}=-i\omega D_{ik}=\int\{3(x_i j_k+x_k j_i)-2\delta_{ik}\mathbf{r}\mathbf{j}\}dV,$$

$$\mathscr{M}=\frac{1}{2c}\int[\mathbf{r}\mathbf{j}]dV.$$

利用方程 $\operatorname{rot}\mathbf{E}=\frac{i\omega}{c}\mathbf{B}$，并考虑到在輻射源附近，$\varepsilon=$常数(由此 $\operatorname{div}\mathbf{E}=0$)，我們得到

$$\int\mathbf{j}_1\mathbf{E}_2dV=-\frac{i\omega}{12}\left(\frac{\partial E_{2i}}{\partial x_k}+\frac{\partial E_{2k}}{\partial x_i}\right)D_{ik}^{(1)}+i\omega\mathbf{B}_2(1)\mathscr{M}_1.$$

由此看出，对于四极子輻射源，互易定理为

$$\left(\frac{\partial E_{2i}(1)}{\partial x_k}+\frac{\partial E_{2k}(1)}{\partial x_i}\right)D_{ik}^{(1)}=\left(\frac{\partial E_{1i}(2)}{\partial x_k}+\frac{\partial E_{1k}(2)}{\partial x_i}\right)D_{ik}^{(2)},$$

而对于磁偶极子輻射源，互易定理为

$$\mathbf{B}_2(1)\mathscr{M}_1=\mathbf{B}_1(2)\mathscr{M}_2.$$

2. 試求均匀的各向同性媒质內偶极子輻射源的强度与媒质的介电常数 ε 和 μ 的关系。

解. 由代入

$$\mathbf{E}=\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\mathbf{E}',\qquad \mathbf{H}=\mathbf{H}',\qquad \omega=\frac{\omega'}{\sqrt{\varepsilon\mu}},$$

(69.1)式变为

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}'=\frac{i\omega'}{c}\mathbf{H}',\qquad \operatorname{rot}\mathbf{H}'=-i\frac{\omega'}{c}\mathbf{E}'+\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}_{外},$$

其中不包含 ε 和 μ，这些方程对于偶极子輻射的解給出波带內的場的矢勢为①

$$\mathbf{A}'=\frac{1}{cR_0}\int\mathbf{j}_{外}dV,$$

式中 R_0 为至輻射源的距离。在这里和下面，我們略去了对計算强度不重要的相因子。因此看出，对給定的 $\mathbf{j}_{外}$，可以写为 $\mathbf{A}'=\mathbf{A}_0$，此处的下角标 0 表示眞空內的輻射源場。对于 $\mathbf{H}'$ 和 $\mathbf{E}'$，我們有

$$\mathbf{H}'=i[\mathbf{k}'\mathbf{A}']=i\sqrt{\varepsilon\mu}[\mathbf{k}\mathbf{A}_0]=\sqrt{\varepsilon\mu}\mathbf{H}_0,\qquad \mathbf{E}'=\mathbf{H}'.$$

由此得

$$\mathbf{H}=\sqrt{\varepsilon\mu}\mathbf{H}_0,\qquad \mathbf{E}=\mu\mathbf{E}_0,$$

而輻射强度为

$$I=I_0\mu^{\frac{3}{2}}\varepsilon^{\frac{1}{2}},$$

① 参閱"場論"第二版，§ 67

此即为所提問題的解。

§70　空腔諧振器內的电磁振蕩

我們来研究由理想导电壁所圍成的眞空腔諧振器內的电磁場。眞空內的单色場方程为

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}=i\frac{\omega}{c}\mathbf{H},\qquad \operatorname{rot}\mathbf{H}=-i\frac{\omega}{c}\mathbf{E}. \tag{70.1}$$

理想导体(即阻抗 $\zeta=0$ 的物体)表面上的边界条件是

$$\mathbf{E}_t=0,\qquad H_n=0. \tag{70.2}$$

要求出这問題的解，只要研究 **E** 或 **H** 就够了。例如，从(70.1)式內消去 **H** 后，我們得到 **E** 的波动方程为

$$\Delta\mathbf{E}+\frac{\omega^2}{c^2}\mathbf{E}=0, \tag{70.3}$$

此外还必須添上一个方程:

$$\operatorname{div}\mathbf{E}=0, \tag{70.4}$$

这方程不能从(70.3)自动得到。根据边界条件 $\mathbf{E}_t=0$ 解这些方程，我們就可以求出場 **E**，然后从(70.1)的第一式可以直接推导出 **H**，而且边界条件 $H_n=0$ 自动地滿足。

当空腔的形状和大小給定时，(70.3)和(70.4)式只对 ω 的某些完全一定的値有解，这些値称为諧振器的电磁振蕩的*本征頻率*[①]。当 $\zeta=0$ 时，电磁場不能透入到金屬內部，因而不存在損失。所以，全部本征振动是非衰減的，也即是全部本征頻率为实数。諧

---

① 当諧振器的空腔被 ε 和 μ 异于1的非吸收电介质充滿时，对这种諧振器的全部公式，可由在空腔諧振器的公式內分別以 $\omega\sqrt{\varepsilon\mu}$，$\sqrt{\varepsilon}\,\mathbf{E}$，$\sqrt{\mu}\,\mathbf{H}$ 代替 ω、**E**、**H** 而得到。这可从下面的事实看出，在这种变换下，(70.1)式变成媒质內的正确麦克斯韦方程:

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}=i\frac{\omega}{c}\mu\mathbf{H},\qquad \operatorname{rot}\mathbf{H}=-i\frac{\omega}{c}\varepsilon\mathbf{E}.$$

特别是媒质的出現使本征頻率減小 $\sqrt{\varepsilon\mu}$ 倍。

振器的本征頻率的数目是无限多的。其中最小頻率的数量級为

$$\omega_1 \sim \frac{c}{l},$$

式中 l 为諧振器的綫性綫度。这从量綱的考虑可以直接看出，因为 l 是表示問題条件的唯一的量綱参量(当諧振器的形状給定时)。大的本征頻率($\omega \gg c/l$)彼此非常靠近，而且在 ω 的每单位間隔內的数目等于

$$\frac{V\omega^2}{2\pi^2 c^3};$$

它只与諧振器的体积 V 有关，而与諧振器的形状无关①。

諧振器內的电場能和磁場能的平均值(对时間而言)分別由下列积分得出:

$$\frac{1}{2}\int \frac{|\mathbf{E}|^2}{8\pi} dV \quad 和 \quad \frac{1}{2}\int \frac{|\mathbf{H}|^2}{8\pi} dV.$$

我們現在证明，这两个值彼此相等。利用(70.1)的第一式，我們写出

$$\int \mathbf{H}\mathbf{H}^* dV = \frac{c^2}{\omega^2}\int \text{rot}\,\mathbf{E}\,\text{rot}\,\mathbf{E}^* dV.$$

分部积分第二个积分:

$$\int \text{rot}\,\mathbf{E}\,\text{rot}\,\mathbf{E}^* dV = \oint \text{rot}\,\mathbf{E}^* [d\mathbf{f}\,\mathbf{E}] - \int \mathbf{E}\,\text{rot}\,\text{rot}\,\mathbf{E}^* dV.$$

因为在体积的边界上，$\mathbf{E}_t = 0$，因而面积分变为零，剩下

$$\int |\mathbf{H}|^2 dV = -\frac{c^2}{\omega^2}\int \mathbf{E}\,\text{rot}\,\text{rot}\,\mathbf{E}^* dV = \frac{c^2}{\omega^2}\int \mathbf{E}\,\Delta\mathbf{E}^* dV,$$

或者由于(70.3)，有

$$\int |\mathbf{H}|^2 dV = \int |\mathbf{E}|^2 dV, \tag{70.5}$$

① 参閱"場論"第二版 § 52。

这就是所要证明的[①]。

假定諧振器壁的阻抗等于零，我們就得到諧振器的非衰减振蕩。現在我們来研究，諧振器壁存在小而有限的阻抗对本征頻率的影响如何？

諧振器壁上一秒內所耗散的平均能量(对时間而言)，可以計算为从空腔內的电磁場流入器壁內的能通量。考虑到阻抗为 ζ 的物体表面上的边界条件(67.6)，我們可以写出能通量密度的法向分量为

$$\bar{S}_n=\frac{c}{8\pi}\operatorname{Re}\{[\mathbf{E}_t\mathbf{H}_t^*]\}=\frac{c\zeta'}{8\pi}|\mathbf{H}_t|^2,$$

式中 ζ' 为 ζ 的实数部分。这个式子內包含有小因子 ζ'，在第一近似下，可以把 $\mathbf{H}$ 理解为由解 $\zeta=0$ 的問题而得到的場。总能量耗散由下列积分得出：

$$\frac{1}{8\pi}\oint\zeta'|\mathbf{H}|^2df, \tag{70.6}$$

上式对諧振器的內表面进行积分。用两倍的总場能，即

$$\frac{1}{2}\frac{1}{8\pi}\int(|\mathbf{E}|^2+|\mathbf{H}|^2)dV=\frac{1}{8\pi}\int|\mathbf{H}|^2dV$$

除(70.6)式，即得到場振幅随时間的衰减率。

衰减率由复数頻率 $\omega=\omega'+i\omega''$ 的虛数部分 ω'' 决定[②]。把公式写成复数形式：

$$\omega-\omega_0=-\frac{ic}{2}\frac{\oint\zeta|\mathbf{H}|^2df}{\int|\mathbf{H}|^2dV}, \tag{70.7}$$

---

① 我們把 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{H}$ 理解为对应于一特定本征頻率的場强度。也不难地证明，对应于两个不同本征頻率 ω_a 和 ω_b 的場，滿足正交关系式：

$$\int\mathbf{E}_a\mathbf{E}_b^*dV=\int\mathbf{H}_a\mathbf{H}_b^*dV=0.$$

② 在无綫电工程中，通常是引进諧振器的品质因数来代替衰减率 $|\omega''|$，品质因数定义为比值 $\omega/2|\omega''|$。

ω 和 ω_0 分别为計及 ζ 和未計及 ζ 的頻率值，利用上式，我們不但可以求出衰減率，而且可以求出本征頻率本身的改变。如我們看到的，后者由 ζ 的虛数部分决定。在 § 67 中曾經指出，通常是 $\zeta''<0$; 因而本征頻率減小。

在实际計算中更为方便的是把(70.7)式分母內的体积分变換为面积分。变換后的結果为①

$$\int|\mathbf{H}|^2 dV=\frac{1}{2}\oint(|\mathbf{H}|^2-|\mathbf{E}|^2)(\mathbf{r}d\mathbf{f}). \tag{70.8}$$

例 題

1. 試求具有理想导电壁的长方形平行六面体形狀的諧振器內的本征振动頻率。

解. 选擇平行六面体的长为 a_1, a_2, a_3 的三个棱为 x, y, z 軸。(70.3)和(70.4)式的解滿足边界条件 $\mathbf{E}_t=0$:

$$E_x=A_1\cos k_x x\ \sin k_y y\ \sin k_z z\cdot e^{-i\omega t}, \tag{1}$$

对 E_y, E_z, 有类似的式子, 其中

$$k_x=\frac{n_1\pi}{a_1},\quad k_y=\frac{n_2\pi}{a_2},\quad k_z=\frac{n_3\pi}{a_3}, \tag{2}$$

n_1, n_2, n_3 为正整数。常数 A_1, A_2, A_3 的关系式为

---

① 由于矢量 $\mathbf{H}$ 与表面相切，我們恒可得到

$$\oint(\mathbf{HH}^*)(\mathbf{r}d\mathbf{f})=\oint(\mathbf{HH}^*)(\mathbf{r}d\mathbf{f})-\oint(\mathbf{Hr})(\mathbf{H}^*d\mathbf{f})-\oint(\mathbf{H}^*\mathbf{r})(\mathbf{H}d\mathbf{f})$$

利用代換: $d\mathbf{f}\to dV\cdot\nabla$, 我們把右側的积分变換为体积分，并利用(70.1)式，我們得到

$$\oint(\mathbf{HH}^*)(\mathbf{r}d\mathbf{f})=ik\int\mathbf{r}([\mathbf{HE}^*]-[\mathbf{H}^*\mathbf{E}])\,dV+\int\mathbf{HH}^*dV.$$

由类似方式，考虑到恒等式 $[\mathbf{r}[\mathbf{E}d\mathbf{f}]]=\mathbf{E}(\mathbf{r}d\mathbf{f})-(\mathbf{rE})d\mathbf{f}=0$ (由于边界条件 $\mathbf{E}_t=0$); 我們得到

$$\oint(\mathbf{EE}^*)(\mathbf{r}d\mathbf{f})=-\oint(\mathbf{EE}^*)(\mathbf{r}d\mathbf{f})+\oint(\mathbf{Er})(\mathbf{E}^*d\mathbf{f})+\oint(\mathbf{E}^*\mathbf{r})(\mathbf{E}d\mathbf{f})=$$

$$=ik\int\mathbf{r}([\mathbf{HE}^*]-[\mathbf{H}^*\mathbf{E}])dV-\int\mathbf{EE}^*dV.$$

将得到的两个等式相減，并考虑到(70.5)式，我們就得到公式(70.8)。

$$A_1k_x+A_2k_y+A_3k_z=0, \tag{3}$$

而本征頻率为

$$\omega^2=c^2(k_x{}^2+k_y{}^2+k_z{}^2).$$

从(1)式算出磁場为

$$H_x=-i\frac{c}{\omega}(A_3k_y-A_2k_z)\sin k_xx\,\cos k_yy\,\cos k_zz\cdot e^{-i\omega t},$$

对 H_y, H_z，有相似的式子。

若 n_1, n_2, n_3 中有二个或者三个全等于零，則 $\mathbf{E}\equiv 0$。所以，和第一个(最小的)頻率相对应的振动是：三个数中有一个等于零，而其他两个等于 1。

由于关系式(3)，(1)式的解(其中 n_1, n_2, n_3 取給定的不为零的值)只包含二个独立的任意常数，也即是每一本征頻率为二次簡并的。n_1, n_2, n_3 中有一为零的頻率是非簡并的。

2. 試求球形諧振器内(半徑为a)电偶极子和磁偶极子的振动頻率。

解. 在电偶极子型的球形駐波内，場 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{H}$ 的形式为①

$$\mathbf{E}=e^{-i\omega t}\mathrm{rot\ rot}\left(\frac{\sin kr}{r}\mathbf{b}\right),$$

$$\mathbf{H}=-ike^{-i\omega t}\mathrm{rot}\left(\frac{\sin kr}{r}\mathbf{b}\right).$$

式中 $\mathbf{b}$ 为恒定矢量，而 $k=\frac{\omega}{c}$。由 $r=a$ 时的边界条件$[\mathbf{nE}]=0$，得到方程：

$$\mathrm{ctg}\,ka=\frac{1}{ka}-ka.$$

它的最小根为 $ka=2.74$。頻率 $\omega\approx 2.74\frac{c}{a}$ 为球諧振器本征頻率中最小的頻率。

在磁偶极子型的球駐波内，

$$\mathbf{E}=ike^{-i\omega t}\mathrm{rot}\left(\frac{\sin kr}{r}\mathbf{b}\right),$$

$$\mathbf{H}=e^{-i\omega t}\mathrm{rot\ rot}\left(\frac{\sin kr}{r}\mathbf{b}\right).$$

由 $\mathbf{E}$ 的边界条件得到方程：

$$\mathrm{tg}\,ka=ka.$$

它的第一个根为 $ka=4.49$.

---

① 参閱"場論"第二版，§ 71。

§ 71. 电磁波在波导管內的傳播

与前一节所研究的具有有限体积的諧振器不同，波导管是一无限长的空腔，即一无限长的空管子①。諧振器內的本征振动代表駐波，而在波导管內的波，只在横方向上才是“駐波”，而沿波导管的长度方向，可以傳播行波。

我們現在来研究截面为任意形状(单連通的)幷沿长度方向都是一样的直波导管的情况。首先，我們假定波导管壁是理想导体。选擇波导管的长度方向为 z 軸。在沿 z 軸方向傳播的行波內，各个量与 z 的关系由因子 $e^{ik_z z}$ 給出，其中 k_z 为常数。

这种波导管內的全部可能的电磁波可以分为两种类型：其中一种为 $H_z=0$，另一种为 $E_z=0$(瑞利 1897)。在第一种波內，磁場是純横向的，称为电型波或 E 波，在第一种波內，电場是純横向的，称为磁型波或 H 波②。

我們首先来研究 E 波；由(70.1)式的 x 分量和 y 分量給出

$$\frac{\partial E_z}{\partial y}-ik_z E_y=i\frac{\omega}{c}H_x,\quad -\frac{\partial E_z}{\partial x}+ik_z E_x=i\frac{\omega}{c}H_y,$$

$$ik_z H_y=i\frac{\omega}{c}E_x,\quad ik_z H_x=-i\frac{\omega}{c}E_y.$$

由此得

$$\begin{aligned} E_x&=\frac{ik_z}{\kappa^2}\frac{\partial E_z}{\partial x},\qquad E_y=\frac{ik_z}{\kappa^2}\frac{\partial E_z}{\partial y}\\ H_x&=-\frac{i\omega}{c\kappa^2}\frac{\partial E_z}{\partial y},\qquad H_y=\frac{i\omega}{c\kappa^2}\frac{\partial E_z}{\partial x}, \end{aligned}\tag{71.1}$$

式中引进了符号:

① 下面我們写出适用于眞空波导管的公式。利用 400 頁底注內所指出的变换，可以过渡到充滿非吸收媒质的波导管的公式。

② E 波和 H 波也分别称为 TM 波和 TE 波(“横磁波”和“横电波”)。

$$\kappa^2=\frac{\omega^2}{c^2}-k_z^2.$$

由此可見，在E波內，**E** 和 **H** 的全部横向分量可以用电場的纵向分量来表示。后者应由解波动方程而得到，这波动方程的二維形式为

$$\Delta_2 E_z+\kappa^2 E_z=0, \tag{71. 2}$$

式中 Δ_2 为二維的拉普拉斯算符。这方程的边界条件是: 在波导管壁上，**E** 的切向分量变为零。为此只須要求在截面的边界上

$$E_z=0 \tag{71. 3}$$

就行了。按照公式(71. 1)，分量为 E_x, E_y 的二維矢量与 E_z 的二維陡度成正比。因而当满足条件(71. 3)时，在 xy 平面內的 **E** 的切向分量也自动地变为零。

由类似方式，在H波內，**E** 和 **H** 的横向分量可以用磁場的纵向分量表示，即

$$H_x=\frac{ik_z}{\kappa^2}\frac{\partial H_z}{\partial x}, \qquad H_y=\frac{ik_z}{\kappa^2}\frac{\partial H_z}{\partial y},$$
$$E_x=\frac{i\omega}{c\kappa^2}\frac{\partial H_z}{\partial y}, \qquad E_y=-\frac{i\omega}{c\kappa^2}\frac{\partial H_z}{\partial x}. \tag{71. 4}$$

纵向場 H_z 由下列方程的解給出:

$$\Delta_2 H_z+\kappa^2 H_z=0, \tag{71. 5}$$

其边界条件为: 在截面的边界上

$$\frac{\partial H_z}{\partial n}=0. \tag{71. 6}$$

按照公式(71. 4)，这条件保证了 **H** 的法向分量变为零。

由此可見，确定波导管內的电磁場的問題，归結为求二維波动方程 $\Delta_2 f+\kappa^2 f=0$ 的解，而其边界条件为 $f=0$ 或在截面边界上，$\frac{\partial f}{\partial n}=0$。对于給定的截面边界，只对参量 κ^2 的完全一定的本征值，

才存在这种解。

对 κ^2 的每一本征值，我們得到頻率 ω 与“波矢量” k_z 之間的关系式为

$$\omega^2 = c^2(k_z^2 + \kappa^2). \tag{71.7}$$

沿波导管长度方向傳播的波的速度由下列导数得出：

$$u_z = \frac{\partial \omega}{\partial k_z} = \frac{c k_z}{\sqrt{k_z^2 + \kappa^2}} = \frac{c^2 k_z}{\omega}. \tag{71.8}$$

对給定的 κ，当 k_z 从 0 变到 ∞ 时，u_z 从 0 变到 c。

在波导管的长度方向，能通量的平均密度(对时間而言)由坡印廷矢量的 z 分量得出。利用公式(71.1)，由簡单的計算，对于 E 波得到

$$\bar{S}_z = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re}\{[\mathbf{E}\mathbf{H}^*]_z\} = \frac{\omega k_z}{8\pi\kappa^4} |\nabla_2 E_z|^2.$$

将 $\bar{S}_z$ 对波导管的截面面积进行积分，即得到总能通量 q，于是我們有

$$\int |\nabla E_z|^2 df = \oint E_z^* \frac{\partial E_z}{\partial n} dl - \int E_z^* \Delta_2 E_z df.$$

第一个积分对截面的周界进行，由于边界条件 $E_z = 0$，該积分变为零。在第二个积分內，我們用 $-\kappa^2 E_z$ 代換 $\Delta_2 E_z$，最后得到

$$q = \frac{\omega k_z}{8\pi\kappa^2} \int |E_z|^2 df. \tag{71.9}$$

对于 H 波，以 H_z 代替 E_z，得到相同的式子。

类似地，可以算出电磁能的密度 W (屬于波导管单位长度)。但是更簡单的是从 q 直接导出 W，因为必須 $q = W u_z$。例如，从(71.8)和(71.9)式，我們得到

$$W = \frac{\omega^2}{8\pi\kappa^2 c^2} \int |E_z|^2 df. \tag{71.10}$$

从(71.7)式得出，对于每一种类型的波(相应于 κ^2 的一定值)都存在一个极小的頻率，等于 $c\kappa$。当頻率更低时，这种波的傳播

即成为不可能。但是在 κ 的全部本征值中，也有一个最小的不为零的本征值 $\kappa_{\min}$(参閱下面)。所以我們得到結論：存在一最低的頻率下限，$\omega_{\min}=c\kappa_{\min}$，在这頻率以下，无論是那一种类型的波，都不能沿波导管傳播。$\omega_{\min}$ 的数量級大約为 c/a，此处 a 为波导管的横向綫度。

但是这种断言只适用于单連通截面的波导管，也即我們到此为止所假定的。对多連通截面的波导管[①]，情况截然不同。在这种波导管內，除了上述的 E 波和 H 波外，还可能傳播一种类型的波，它的頻率不受任何条件的限制。

这种类型的波称为主波，它的特征为：$k_z=k$(即 $\kappa=0$)；其傳播速度和光速 c 相等。我們現在来說明这种波的主要性质。同时我們将看到这种波所以不能在单連通截面的波导管內傳播的原因。

主波內的全部場分量滿足二維的拉普拉斯方程 $\Delta_2 f=0$。当边界条件为 $f=0$ 时，这方程的唯一解是 $f\equiv 0$，它在全部区域內(单連通或多連通的)都是正則的。因此在主波內，$E_z=0$。

当边界条件 $\frac{\partial f}{\partial n}=0$ 时，正則解为 $f=$ 常数。但是容易看出，当 $f=H_z$ 时，这个常数只能为零(我們記住，常数所表示的量与 x, y 无关；它与 z 和 t 的关系則由因子 $e^{i(k_z z-\omega t)}$ 給出)。实际上，将下式

$$\operatorname{div}\mathbf{H}=\frac{\partial H_x}{\partial x}+\frac{\partial H_y}{\partial y}+i\frac{\omega}{c}H_z=0$$

对截面面积进行积分，我們得到

$$\oint H_n dl+\frac{i\omega}{c}\int H_z df=0;$$

由于在截面边界上 $H_n=0$ 和在截面面积內，H_z 为常数，由此得到

① 这里所說的既是指两个互相表里的波导管(一个在另一个里面)之間的空間，也是指两平行导綫外的空間而言。

$H_z=0$。

由此可見，主波是純粹的橫波。当 $E_z=H_z=0$ 时，由 (70.1) 式的 x 分量和 y 分量給出：

$$H_x=-E_y, \qquad H_y=E_x, \tag{71.11}$$

也即是場 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{H}$ 互相垂直，并且絕对值相等。这些場由下列方程求出：

$$\operatorname{div}\mathbf{E}=\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}=0, \quad (\operatorname{rot}\mathbf{E})_z=\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}=0,$$

其边界条件为 $\mathbf{E}_t=0$。

我們看到，$\mathbf{E}$（因而 $\mathbf{H}$）与 x, y 的关系由二維的靜电問題 $\mathbf{E}=-\nabla_2\varphi$ 的解得出，其中場势 φ 滿足方程 $\Delta_2\varphi=0$，边界条件为 $\varphi=$常数。在单連通区域內，这边界条件表明 $\varphi=$常数（因而 $\mathbf{E}=0$）是全区域內唯一的正則的解。由此也就证明了这种类型的波不可能在单連通截面的波导管內傳播。在多連通区域內，边界条件內的常数值，在不同的边界部分不一定相同，于是拉普拉斯方程具有非寻常解。这时波导管横截面上的电場分布，相当于具有給定电势差的电容器两板間的平面靜电場。

到此为止，我們假定了波导管壁是理想导体①。但波导管壁上存在的小而有限的阻抗引起能量的損耗，因而也引起波沿波导管傳播时发生衰减。衰减系数的計算，和前一节內計算諧振器內电磁振动随时間的衰减完全相似。

波导管壁上1秒內所耗散的能量（屬于单位长度）由下列积分得出：

$$\frac{c}{8\pi}\zeta'\oint|\mathbf{H}|^2dl,$$

这积分对截面的边界进行；$\mathbf{H}$ 是假定 $\zeta=0$ 时算出的磁場。用沿

① 我們注意到，特别是只在这种条件下，严格区分为 $E_z=0$ 的波和 $H_z=0$ 的波，一般地才是可能的。

波导管的二倍的能通量 q 除这个量，我們就得到所求的衰减系数 α。在这种定义下，α 給出沿波导管长度方向按 $e^{-\alpha z}$ 而减弱的波振幅的衰减速度。

由(71.1)或(71.4)式，将全部的量用 E_z 或 H_z 来表示，我們得到 E 波的吸收系数的公式为

$$\alpha=\frac{\omega\zeta'}{2\kappa^2 k_z c}\frac{\oint|\nabla_2 E_z|^2 dl}{\int|E_z|^2 df}. \tag{71.12}$$

对于 H 波：

$$\alpha=\frac{c\kappa^2\zeta'}{2k_z\omega}\frac{\oint\{|H_z|^2+(k_z^2/\kappa^4)|\nabla_2 H_z|^2\}dl}{\int|H_z|^2 df}. \tag{71.13}$$

在实际的計算中，把分母內的面积分变換成沿边界的綫积分更为方便。我們在这里引进这样得到的公式，它們的推导过程和(70.8)式的推导过程完全相似，这些公式是

$$\int|E_z|^2 df=\frac{1}{2\kappa^2}\oint(\mathbf{nr})|\nabla_2 E_z|^2 dl,$$

$$\int|H_z|^2 df=\frac{1}{2\kappa^2}\oint(\mathbf{nr})\{\kappa^2|H_z|^2-|\nabla_2 H_z|^2\}dl. \tag{71.14}$$

当 $k_z\to 0$，即頻率 $\omega\to c\kappa$ 时，(71.12)和(71.13)式趋近于无穷大。但是这时这些公式已不能应用，因为推导它們时曾假定 κ 小于 k_z。

公式(71.12)和(71.13)不能应用于主波(在多連通截面波导管內的)，因为在主波內 E_z、H_z 和 κ 全等于零。在这种情况下，可以把全部的場分量用标量势 φ 来表示。考虑到在主波內，場 $\mathbf{H}$ 和 $\mathbf{E}=-\nabla_2\varphi$ 相互垂直，并且数值相等，我們得到主波的吸收系数的表达式为

$$\alpha=\frac{\zeta'\oint|\nabla_2\varphi|^2dl}{2\int|\nabla_2\varphi|^2df}. \tag{71.15}$$

当吸收系数不太小时[因而公式(71.15)不能应用]，如果波长 c/ω 大于波导管的横向綫度，则在这种情况下，主波沿波导管的傳播可以比較簡单地来研究。

如上面所指出的，主波內的横向电場在任何时刻都相应于带有数值相等和正負号相反的电荷的波导管壁所組成的电容器內的靜电場。我們用 $\pm e(z)$ 表示波导管单位长度上的电荷。这些电荷与波导管壁上流过的电流 $\pm J(z)$ 由"連續性方程"联系起来:

$$\frac{\partial e}{\partial t}=-\frac{\partial J}{\partial z},$$

或者对于单色場，

$$i\omega e=\frac{\partial J}{\partial z}.$$

其次，設 C 为波导管单位长度的电容，波导管壁間的"电势差"为 $\varphi_2-\varphi_1=\frac{e}{C}$；将它对 z 求微分，我們就得到維持波导管壁內电流流过的电动势(我們記住，有吸收时場不是純粹横向的)。令这电动势等于 ZJ(其中 Z 为波导管单位长度上的阻抗)，我們得到

$$-\frac{\partial}{\partial z}\frac{e}{C}=ZJ,$$

或者

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{C}\frac{\partial J}{\partial z}\right)+i\omega ZJ=0. \tag{71.16}$$

代入 $Z=R-\frac{i\omega L}{c^2}$(其中 R 和 L 分别为波导管单位长度的电阻和自感)后，我們就可以从单色的电流分量化回到为时間任意函数的电流。再假定沿波导管长度方向的电容 C 为常数，我們就得

到所謂电报方程:

$$\frac{1}{C}\frac{\partial^2 J}{\partial z^2}-R\frac{\partial J}{\partial t}-\frac{L}{c^2}\frac{\partial^2 J}{\partial t^2}=0. \qquad (71.17)$$

当电阻不存在时($R=0$)，正如所預料的，这方程化为波动方程，波的傳播速度为$\sqrt{c^2/LC}=c$①。

例 題

1. 試求沿长方形截面(边长为 a、b)的波导管傳播的波的 κ 值。幷求出这种波的衰减系数。

解、在 E 波内②，

$$E_z=常数\cdot \sin k_x x\ \sin k_y y,$$

式中

$$k_x=\frac{n_1\pi}{a},\quad k_y=\frac{n_2\pi}{b},$$

而 n_1, n_2 为从1开始的整数。在 H 波内，

$$H_z=常数\cdot \cos k_x x\ \cos k_y y,$$

而且 n_1 和 n_2 中有一个可以等于零。在两种波内，

$$\kappa^2=k_x^2+k_y^2=\pi^2\left(\frac{n_1^2}{a^2}+\frac{n_2^2}{b^2}\right).$$

κ 的最小値相应于 H_{10} 波(下角标表示 n_1, n_2 的値)，幷且 $\kappa_{\min}=\frac{\pi}{a}$(假定$a>b$)。

从公式(71.12)和(71.13)，可以算出衰减系数，对于 E 波，它等于

$$\alpha=\frac{2\zeta'\omega}{c\kappa^2 k_z ab}(k_x^2 b+k_y^2 a),$$

对于 $H_{n_1 0}$ 波，

$$\alpha=\frac{\zeta'\omega}{ck_z ab}\left(a+\frac{2\kappa^2}{k^2}b\right),$$

---

①当截面給定时，从求$\frac{1}{C}$和 L 間題的数学等效性，可以得到等式 $LC=1$。理想导体表面間的电場和磁場互相垂直，幷且大小相等(參閱(71.11)式)，而且导体表面的場値，在第一种情况下决定电荷密度，而在第二种情况下决定电流密度。因此，場能和电荷平方或电流平方之間的比例系数$\left(\frac{1}{C}和 L\right)$也相等。

②我們处处都略去了因子$e^{i(k_z z-\omega t)}$

而对于 $H_{n_1n_2}$ 波($n_1, n_2 \neq 0$),

$$\alpha=\frac{2c\kappa^2\zeta'}{\omega k_2 ab}\left[a+b+\frac{k_z^2}{\kappa^4}(k_x^2a+k_y^2b)\right].$$

2. 所求与例題 1 相同，但波导管为圓截面的(半徑为 a)。

解. 解极坐标 r、φ 表示的波动方程，在 E 波內，我們得到

$$E_z=常数\cdot J_n(\kappa r)_{\cos}^{\sin}n\varphi,$$

其条件为 $J_n(\kappa a)=0$，这条件給出 κ 的值。在H波內，H_z 由相同的公式給出，而 κ 的値由条件 $J'_n(\kappa a)=0$ 求出。对于 H_1 波，κ 为最小值，并且 $\kappa_{\min}=\frac{1.84}{a}$。

由公式(71.12)—(71.14)，可以算出衰減系数，对于 E 波，它等于

$$\alpha=\frac{\omega\zeta'}{cak_z},$$

而对于 H 波，

$$\alpha=\frac{c\zeta'\kappa^2}{\omega k_z a}\left[1+\frac{n^2\omega^2}{c^2\kappa^2(a^2\kappa^2-n^2)}\right].$$

§ 72. 微粒对电磁波的散射

我們現在来研究宏观粒子对电磁波的散射現象，粒子的綫度小于被散射波的波长 $\lambda\sim c/\omega$(瑞利，1871)。当这条件滿足时，粒子附近的电磁場可以认为是均匀的。粒子在均匀的周期場內得到一定的电矩$\mathscr{P}$和磁矩$\mathscr{M}$，它們对时間的关系由因子 $e^{-i\omega t}$ 給出。于是散射波可以描写为由这些交变矩所引起的輻射的結果。在距离粒子比 λ 大的距离 R 上，波带內被散射波的場由下式給出[①]:

$$\mathbf{H}'=\frac{\omega^2}{c^2R}\{[\mathbf{n}\mathscr{P}]+[\mathbf{n}[\mathscr{M}\mathbf{n}]]\}, \qquad (72.1)$$

$$\mathbf{E}'=[\mathbf{H}'\mathbf{n}],$$

式中的单位矢量 $\mathbf{n}$ 指出散射方向，而$\mathscr{P}$和$\mathscr{M}$的值必須取在 $t-\frac{R}{c}$ 的时刻(被散射波的場，我們用带撇的字母表示，而入射波的場用不

① 参閱"場論"第二版，§ 77。

带撇的字母表示)。在立体角 do 內散射的輻射的平均强度(对时間平均)等于

$$dI=\frac{1}{2}\frac{c}{4\pi}|\mathbf{H}'|^2R^2do,$$

除以入射波內的能通量密度:

$$\frac{c}{8\pi}|\mathbf{H}|^2=\frac{c}{8\pi}|\mathbf{E}|^2,$$

我們就得到有效散射截面。

如果粒子的綫度不但小于 λ, 而且也小于相应于粒子物质內的頻率 ω 的"波长"δ, 則 $\mathscr{P}$ 和 $\mathscr{M}$ 的計算特别簡单。在这种情况下,可以从均匀的外靜电場的公式算出粒子的极化率, 当然其唯一的差别是: 对于 ε 和 μ, 不是取它們的靜电值,而是取相应于給定頻率 ω 的值, 若如通常的情况一样, μ 接近于 1, 則在(72.1)內可以略去磁偶极子項。

例如,对半徑为 a 的球形粒子,我們有(参閱(8.9)):

$$\mathscr{P}=V\alpha\mathbf{E},\quad \alpha=\frac{3}{4\pi}\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2},\tag{72.2}$$

和有效散射截面为

$$d\sigma=\frac{\omega^4}{c^4}|\alpha|^2V^2\sin^2\theta do,\tag{72.3}$$

式中 θ 为散射方向 $\mathbf{n}$ 与綫偏振入射波的电場 $\mathbf{E}$ 方向之間的夹角。总有效截面为

$$\sigma=\frac{8\pi|\alpha|^2\omega^4V^2}{3c^4}.\tag{72.4}$$

有效截面依賴頻率的关系,由因子 ω^4 和极化率决定。如果頻率很小, 以致 α 的色散不存在, 則散射与 ω^4 成正比。我們还注意到,有效截面与粒子体积的平方成正比。

如果入射波不是偏振化的(自然光),則要得到微分有效截面,必須将(72.3)式对垂直于入射波傳播方向(即其波矢量 $\mathbf{k}$ 的方向)

的平面內的矢量 **E** 的所有方向求平均。我們用 ϑ 和 φ 分别表示极角和 **n** 方向相对于 **k** 方向的方位角（而且 φ 从 **k**, **E** 平面算起），則我們得到 $\cos\theta = \sin\vartheta\ \cos\varphi$（图 32），于是

$$d\sigma=\frac{\omega^4}{c^4}|\alpha|^2V^2(1-\sin^2\vartheta\times\cos^2\varphi)do. \qquad (72.5)$$

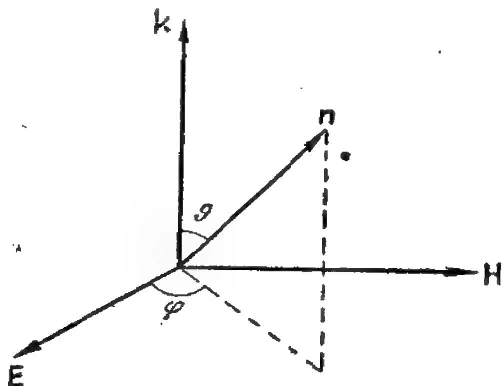


图 32

对 φ 求平均值后，我們得到非偏振波的有效散射截面的公式为[1]

$$d\sigma=\frac{\omega^4}{2c^4}V^2|\alpha|^2(1+\cos^2\vartheta)do, \qquad (72.6)$$

此处 ϑ 为入射方向与散射方向間的夹角。

从(72.5)式，也很容易求出被散射光的消偏振度。为此，我們注意到当 **E** 的方向一定时，**E**′ 的方向在 **E**, **n** 平面內。所以，被散射波內的电場 **E**′ 的方向在 **k**, **n** 平面（散射平面）內或者与它垂直，将分别視矢量 **E** 相对于 **k**, **n** 平面的方位角等于 $\varphi=0$ 或 $\varphi=\frac{\pi}{2}$ 而定。設 $I_\parallel$ 和 $I_\perp$ 为具有这两种偏振方向的散射强度；消偏振度定义为这些量的最小值与最大值之比。按照(72.5)式，我們得到

$$\frac{I_\parallel}{I_\perp}=\cos^2\vartheta. \qquad (72.7)$$

如果散射粒子的介电常数很大，則 $\delta\sim c/\omega\sqrt{\varepsilon}\ll\lambda$。于是粒子的綫度这时可以小于 λ，但不小于 δ。在 $\frac{1}{\varepsilon}$ 的第一近似下，粒子的

---

[1] 为以后参考起見，我們列出公式：

$$\overline{\sin^2\theta}=\frac{1}{2}(1+\cos^2\vartheta).$$

电矩可以当作导体（$\varepsilon\to\infty$）在均匀恒定外电場內的电矩而簡单計算出来。但在这些条件下計算磁矩时，粒子內所发生的感应电流非常重要，因而問題不能归結为静态問題。代替此，我們必須求(63.2)式

$$\Delta\mathbf{H}+\varepsilon\frac{\omega^2}{c^2}\mathbf{H}=0 \tag{72.8}$$

的解(我們假定 $\mu=1$)，它变成离粒子很远处的入射波的場。磁矩和电矩这时为同一数量級，并且在(72.1)式內必須保留两項。于是散射的角分布和数值，和上面所討論的情况比較，有重大的差別(参閱例題2)。

例 題

1. 設綫偏振光被无序取向的微粒所散射，微粒的电极化率張量有三个不同的主值。試求被散射光的消偏振系数。

解 和正文內一样，略去磁矩后，从(72.1)式我們得到

$$\mathbf{E}'=\frac{\omega^2}{c^2R}[[\mathbf{n}\mathscr{P}]\mathbf{n}].$$

所求的消偏振系数由下列的二維張量的主值比給出：

$$I_{\alpha\beta}=\overline{E'_\alpha E'^*_\beta},$$

式中横綫表示当散射方向 $\mathbf{n}$ 給定时对散射粒子的所有取向求平均値，而下角标 α 和 β 取垂直于 $\mathbf{n}$ 的平面內的两个值①。但是更为方便的是求三維張量 $\mathscr{P}_i\mathscr{P}_k^*$ 的平均値，然后把它們投影到垂直于 $\mathbf{n}$ 的平面內；張量 $\overline{\mathscr{P}_i\mathscr{P}_k^*}$ 的这些分量与相应的 $I_{\alpha\beta}$ 的分量成正比。

代入 $\mathscr{P}_i=\alpha_{ik}E_k$ 后，我們有

$$\overline{\mathscr{P}_i\mathscr{P}_k^*}=\overline{\alpha_{il}\alpha_{km}^*}E_lE_m^*.$$

为了求平均値，我們利用公式：

$$\overline{\alpha_{ik}\alpha_{lm}^*}=A\delta_{ik}\delta_{lm}+B(\delta_{il}\delta_{km}+\delta_{im}\delta_{kl}).$$

这是四秩張量的最普遍形式，它对两对下角标 i,k 和 l,m 是对称的，并且只包含标量常数。这些常数由这样两个等式求出，这些等式是使張量对下角标

① 参閱“場論”第二版，§50。

$i=k$, $l=m$ 降秩一次, 再对 $i=l$, $k=m$ 降秩一次而得到的。它們等于

$$A=\frac{2|\alpha_{ii}|^2-|\alpha_{ik}|^2}{15}=\frac{1}{15}\{|\alpha_1|^2+|\alpha_2|^2+|\alpha_3|^2+$$

$$+4\mathrm{Re}(\alpha_1\alpha_2^*+\alpha_1\alpha_3^*+\alpha_2\alpha_3^*)\},$$

$$B=\frac{3|\alpha_{ik}|^2-|\alpha_{ii}|^2}{30}=\frac{1}{15}\{|\alpha_1|^2+|\alpha_2|^2+|\alpha_3|^2-$$

$$-\mathrm{Re}(\alpha_1\alpha_2^*+\alpha_1\alpha_3^*+\alpha_2\alpha_3^*)\},$$

式中 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为張量 α_{ik} 的主值。

在綫偏振波內, 場的振幅 $\mathbf{E}^{(i)}$(我們略去时間因子 $e^{-i\omega t}$)常常可以定义它为实数。于是, 我們得到

$$\overline{\mathscr{D}_i\mathscr{D}_k^*}=(A+B)E_iE_k+B\delta_{ik}E^2, \tag{1}$$

設 z 軸沿 $\mathbf{n}$ 方向, 而 xy 平面通过矢量 $\mathbf{n}$ 和 $\mathbf{E}$; 这些軸是張量 $I_{\alpha\beta}$ 的主軸。取張量(1)的相应分量后, 我們得到消偏振系数为

$$\frac{I_y}{I_x}=\frac{B}{(A+B)\sin^2\theta+B},$$

式中 θ 为 $\mathbf{E}$ 与 $\mathbf{n}$ 間的夹角。

2. 試求在半徑为 a 的小球上散射时的有效散射截面, 球的介电常数 ε 很大; 我們假定 $\lambda\gg a\sim\delta$。

解. 計算具有給定 ε 值(和 $\mu=1$)的小球在交变磁場 $\mathbf{H}$ 內所得到的磁矩的問題, 和 § 45 內所解的問題(例題 1)相同, 所不同的是, 在前面所得到的公式內, 必須令 $k=\frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon}$。因此, 我們有

$$\mathscr{M}=-a^3\gamma\mathbf{H},$$

式中

$$\gamma=\frac{1}{2}\left(1+\frac{3}{ka}\mathrm{ctg}\,ka-\frac{3}{(ka)^2}\right).$$

在对 $\frac{1}{\varepsilon}$ 的第一近似下, 电矩可以簡单地当作导电球($\varepsilon\to\infty$)在均匀恒定电場內所得到的电矩来計算:

$$\mathscr{P}=a^3\mathbf{E}.$$

考慮到 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{H}$ 互相垂直, 利用(72.1)式, 經过簡单的計算后, 我們得到有效散射截面的公式为

$$d\sigma=\frac{a^6\omega^4}{c^4}\{|\gamma|^2\cos^2\varphi+\sin^2\varphi-(\gamma+\gamma^*)\cos\vartheta+$$

$$+\cos^2\vartheta(\cos^2\varphi+|\gamma|^2\sin^2\varphi)\}do$$

式中 φ 和 ϑ 为图 32 上所指出的角度。当非偏振光散射时，

$$d\sigma=\frac{a^6\omega^4}{c^4}\left\{\frac{1}{2}(1+|\gamma|^2)(1+\cos^2\vartheta)-(\gamma+\gamma^*)\cos\vartheta\right\}do,$$

而被散射光的消偏振度为

$$\frac{I_{\parallel}}{I_{\perp}}=\left|\frac{\gamma-\cos\vartheta}{1-\gamma\cos\vartheta}\right|^2.$$

总散射截面为

$$\sigma=\frac{8\pi a^6\omega^4}{3c^4}(1+|\gamma|^2).$$

在 $ka\to\infty$ 的极限下(即是当 $\lambda\gg a\gg\delta$ 时)，我們有 $\lambda=\frac{1}{2}$；这极限値相应于由理想反射球所引起的散射，对这样的球，一般說来，无論电場或磁場，都不会透入到球的內部。

§73. 微粒对电磁波的吸收

电磁波在微粒上的散射同时伴随着吸收。有效吸收截面由单位时間在粒子上所耗散的平均能量 Q 与入射能通量密度之比給出。为了算出 Q，这时可以利用公式：

$$Q=-\mathscr{P}\dot{\mathfrak{E}}-\mathscr{M}\dot{\mathfrak{H}}. \tag{73.1}$$

式中 $\mathscr{P}$ 和 $\mathscr{M}$ 为粒子的总电矩和总磁矩，而外場 $\mathfrak{E}$ 和 $\mathfrak{H}$ 由散射波內的場 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{H}$ 代替[比較(45.21)式]。

将各量用复数表示，我們可以写出(参閱 262 頁上的底注)：

$$Q=-\frac{1}{2}\mathrm{Re}\{\mathscr{P}\dot{\mathbf{E}}^*+\mathscr{M}\dot{\mathbf{H}}^*\}=\frac{\omega}{2}V(\alpha_e''+\alpha_m'')|\mathbf{E}|^2,$$

式中 α_e 和 α_m 为粒子的电极化率和磁极化率。用入射的能通量相除以后，我們得到

$$\sigma=\frac{4\pi\omega}{c}(\alpha_e''+\alpha_m''). \tag{73.2}$$

我們把这公式应用到半徑为 a 的小球的吸收上($a\ll\lambda$)，并假定球是非磁性的($\mu=1$)。于是吸收的特征将与介电常数的数值有重大的关系。

若 ε 不太大，則除了 $a \ll \lambda$ 外，我們还有 $a \ll \delta$。在这种情况下，与电极化率相比較，可以略去磁极化率。取(72.2)式給出的电极化率，我們得到

$$\sigma = \frac{12\pi\omega a^3 \varepsilon''}{c[(\varepsilon'+2)^2+\varepsilon''^2]}. \tag{73.3}$$

如果 $|\varepsilon| \gg 1$，則电吸收部分变成很小，而磁吸收部分可能变成是主要的，尽管 $\delta \gg a$。当 $\delta \gg a$（也即是 $|ka| \ll 1$）时，磁极化率为

$$\alpha_m = \frac{(ak)^2}{40\pi} = \frac{a^2\omega^2\varepsilon}{40\pi c^2},$$

有效吸收截面为

$$\sigma = \frac{12\pi\omega a^3\varepsilon''}{c}\left(\frac{1}{|\varepsilon|^2} + \frac{\omega^2 a^2}{90c^2}\right). \tag{73.4}$$

当 ε 再增大时，电吸收部分变成小于磁吸收部分。在 $\delta \ll a$（也即是 $|ka| \gg 1$，$\operatorname{ctg} ka \to -i$）的极限情况下，我們有

$$\alpha_m = \frac{9i}{8\pi ak} = \frac{9ic}{8\pi\omega a}\zeta,$$

式中 $\zeta = 1/\sqrt{\varepsilon}$ 为小球的表面阻抗。由此得

$$\sigma = 6\pi a^2 \zeta''. \tag{73.5}$$

我們注意到，这个公式可以由更直接的方法得到，不必利用小球的磁极化率 $\alpha_m(\omega)$ 的普遍表达式。当 ζ 很小时，将平均坡印廷矢量(67.4)对球表面进行"积分"，我們就可以算出耗散能量 Q，而且球面上的磁場分布，可以由求均匀磁場内的超导体球（$\zeta=0$）問題的解(42.3)得出。

知道了小球的有效吸收截面之后，我們就可以直接求出小球的热輻射强度。按照克希霍夫定律[①]，强度 dI（在頻率 $d\omega$ 的范圍内）可以用 $\sigma(\omega)$ 表示为

$$dI = 4\pi c\sigma(\omega)e_0(\omega)d\omega,$$

① 参閱"統計物理学"第三版，§ 60。

式中

$$e_0(\omega)=\frac{\hbar\omega^3}{4\pi^3c^3(e^{\hbar\omega/T}-1)}$$

为单位体积和单位立体角內黑体輻射的譜密度。

§74. 楔上的衍射

通常的近似衍射理論[①]所根据的假定是与几何光学的偏差很小。因此首先假定所有的綫度都大于波长；这不但指物体(光屏)或物体上的小孔的綫度，也指物体至光发射点与观测点的距离。其次，我們只研究小衍射角，也即是只研究光沿接近于几何暗影边緣的方向的分布。在这些条件下，物质的具体的光学性质一般是不重要的。重要的只是光屏不透明这一事实。

如果上述条件不滿足，則求衍射問題的解需要求出波动方程的精确解，并考虑到物体表面上依賴于物体具体性质的相应边界条件。但求出这样的解在数学上是非常困难的，因而只能对比較少数的問題进行。这时通常是对发生衍射的物体的性质作一个簡化的假定，即假定它是理想导电的(同时从光学观点看来，是理想反射的)。

为此，我們注意到下面的情况。假定物体表面为"黑体"，也即是能够完全吸收入射到它表面上的光能，这样来解衍射問題似乎显得是很合理的。但是，实际上，在提出精确的衍射問題时，对物本的性质所作的这种假定是存在內部矛盾的。問題在于，若物质本身是强吸收的，則物质表面的反射系数不是很小，而相反的接近于1(参閱§67)。所以反射系数接近于零要求是弱吸收的，而且物质的厚度必須大于波长。在精密的衍射理論中，在物体边緣附近(与波长同数量級的距离上)的表面部分必然起着重大的作用；

① 参閱"場論"，第二版，§§59—61。

但物体边緣附近的厚度总是很小，因而假定它是黑体显然是不正确的。

精确求解由两相交半平面所圍成的理想导电楔边緣上的光衍射問題，具有重大的理論兴趣(这种解由索末菲首先得到，1894)。全面叙述这一非常复杂的数学理論，需要应用特殊的数学工具，这超出了本书的范圍。这里为参考起見，只是叙述最后的結果[①]。

我們选擇楔的边緣为柱坐标系 r, φ, z 的 z 軸。楔的前表面(图 33 上的 OA)相应于 $\varphi=0$，而后表面(OB)相应于 $\varphi=\gamma$，式中 $2\pi-\gamma$ 为楔的开度角；在楔外的区域相应于$0\leqslant\varphi\leqslant\gamma$。假設振幅等于 1 的单色平面波以角度 φ_0 在 r, φ 平面內入射到楔的前表面上(由于楔的对称性，只消研究 $\varphi_0<\dfrac{\gamma}{2}$ 的情况)。我們将区别入射波(以及衍射波)的两种偏振情况：矢量 $\mathbf{E}$ 或者矢量 $\mathbf{H}$ 平行于楔的边緣(z 軸)。我們用字母 u 表示这两种情况下的 E_z 或 H_z。

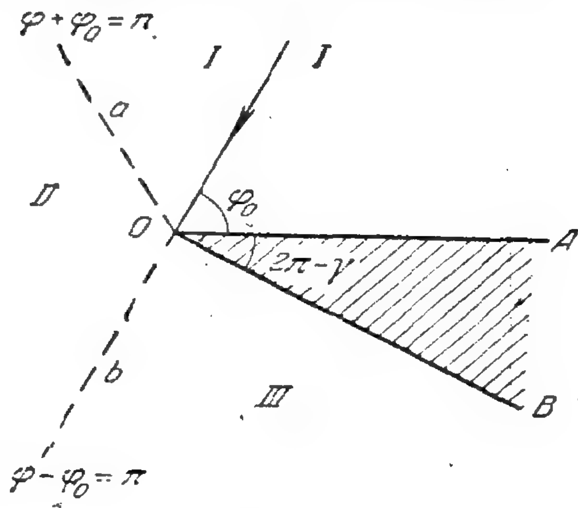


图 33

于是整个空間內的电磁場由下式給出(我們略去了时間因子 $e^{-i\omega t}$)：

① 詳細的計算过程可參閱索末菲的“光学”，ИЛ, 1953；F. 弗朗克和 P. 密西斯的“数学物理的微分和积分方程”ч. 2, гл. XX, ОНТИ, 1937。另一解法由 М. И. 康托罗維奇和 Н. Н. 列別捷夫提出，參閱 Г. А. 金茲堡的书：“电磁現象数学理論問題选集”，гл. XXII, Изд. АН СССР, 1948。

对柱形波(由平行于楔边的綫源所发射的)，衍射問題的不同解法，已由H. S. 卡耳斯給出(Proc. Lond. Math. Soc. 30, 121, 1899)。

$$u(r, \varphi)=v(r, \varphi-\varphi_0)\mp v(r, \varphi+\varphi_0), \qquad (74.1)$$

式中上面和下面的正負号分别相应于 **E** 和 **H** 沿 z 軸方向的偏振情况，而函数 $v(r, \psi)$ 由下列的复数积分定出：

$$v(r, \psi)=\frac{1}{2\gamma}\int_C e^{-ikr\cos\zeta}\frac{d\zeta}{1-e^{-i\pi(\zeta+\psi)/\gamma}} \qquad (74.2)$$

式中 $k=\omega/c$。設 ζ 平面內的积分路綫 $C=C_1+C_2$ 包括由图 34所示的两个迴路，这两个迴路的端点在 ζ 平面內 $\mathrm{Im}(\cos\zeta)<0$ 的部分(图 34 上的斜綫区域)伸向无穷远处，因此因子 $e^{-ikr\cos}$，在无穷远处趋近于零。(74.2)內的被积式有极点位于实軸 ζ 的 $\zeta=-\psi+2n\gamma$ 的点处，式中 n 为整数。代替

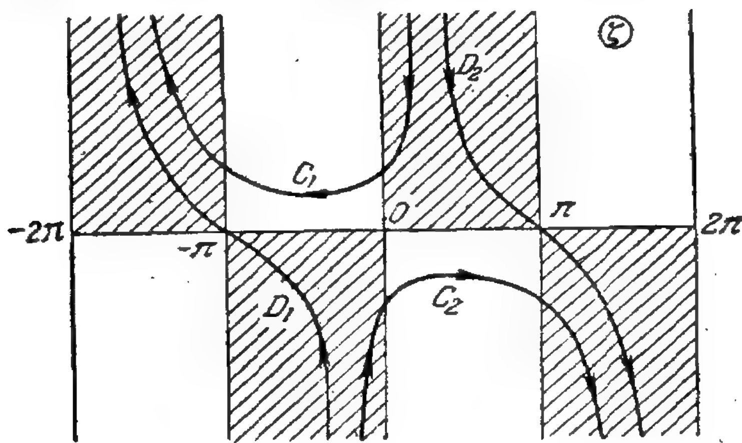


图 34

积分綫路 C，我們可以对綫路 $D=D_1+D_2$(图 34)进行积分，只要在积分上加上被积式在 $-\pi\leqslant\zeta\leqslant\pi$ 区間內的极点处的留数（如果存在的話）。把 v 写成

$$v(r, \psi)=v_0(r, \psi)+v_d(r, \psi), \qquad (74.3)$$

式中 v_d 为积分(74.2)，对綫路 D 进行，而 v_0 是上述极点处的留数的貢献。每一极点都在 v_0 內产生一項，等于

$$e^{-ikr\cos(\psi-2n\gamma)},$$

它或者描写入射波，或者表示从楔面上按几何光学定律而反射的某种波。函数 v_d 描写波的衍射畸变。在距离楔边緣很远(与波长比較)处的場具有最大的意义。当 $kr\gg1$ 时，漸近公式①

① 这个漸近展开式下面的项，参閱泡利的論文(Phys. Rev., **54**, 924, 1938)。

$$v_d(r,\psi)=\frac{\pi}{\gamma\sqrt{2\pi kr}}e^{i\left(kr+\frac{\pi}{4}\right)}\times$$

$$\times\frac{\sin\left(\frac{\pi^2}{\gamma}\right)}{\cos\left(\frac{\pi^2}{\gamma}\right)-\cos\left(\frac{\pi\psi}{\gamma}\right)}, \qquad (74.4)$$

正确，只要角 ψ 满足条件:

$$\left(\cos\frac{\pi^2}{\gamma}-\cos\frac{\pi\psi}{\gamma}\right)^2\gg\frac{1}{kr}. \qquad (74.5)$$

函数 v_d 以及場

$$u_d(r,\varphi)=v_d(r,\varphi-\varphi_0)\mp v_d(r,\varphi+\varphi_0)$$

与 r 的相依关系，由因子 $e^{ikr}/\sqrt{r}$ 給出，也即是这場具有仿佛由楔边緣所发射的柱形波的性质。

上述形式的(74.1)—(74.5)式，当角 γ 和 φ_0 取任何值都正确。为明确起見，对这些公式的进一步討論，我們将假定 γ 和 φ_0 ($\gamma>\pi+\varphi_0$)的关系为：从几何观点看来，这种关系导至形成两个边界：全影的边界 Ob(图 33 上的 III 区)和从表面 OA 所反射的波的"暗影"的边界 Oa①。

在区域 I, II, III 內，函数

$$u_0(r,\varphi)=v_0(r,\varphi-\varphi_0)\mp v_0(r,\varphi+\varphi_0)$$

具有下列形状:

$$\begin{aligned}&\text{在区域 I 內，} u_0=e^{-ikr\cos(\varphi-\varphi_0)}\mp e^{-ikr\cos(\varphi+\varphi_0)},\\ &\text{在区域 II 內，} u_0=e^{-ikr\cos(\varphi-\varphi_0)},\\ &\text{在区域 III 內，} u_0=0.\end{aligned} \qquad (74.6)$$

这些式子当 $kr\to\infty$ 时不为零，它們描写沒有受到衍射畸变的入射波(在区域 II 內)或者入射波和反射波的集合(在区域 I 內)。衍射

① 在图 33 上，$\varphi_0<\frac{\pi}{2}$；如果 $\varphi_0>\frac{\pi}{2}$，則边界 Oa 在入射波方向的右側。

当 $\gamma<\pi+\varphi_0$ 时，全影区域一般不存在，而反射(一次或多次的)发生于楔的两側。

引起的場畸变由(74.4)式給出，但条件(74.5)当 ψ 太接近于 π 和 $\psi-\pi$ 之差不再小于 $1/\sqrt{kr}$ 时，已不再正确。

$\psi=\pi$ 相应于“暗影”的几何边界；当 $\psi=\varphi-\varphi_0$ 时，这是全影的边界，而当 $\psi=\varphi+\varphi_0$ 时，为反射波的影的边界。在这些値的紧邻近，必須应用另一漸近式，它的正确性只要求滿足不等式：$|\psi-\pi|\ll1$。这一条件和条件 $kr\gg1$ 一起，正好保证了通常的菲涅耳近似衍射理論可以应用[①]。与此相应，在全影边界 Ob 附近，我們得到下列的漸近式：

$$u(r,\varphi)=e^{-ikr\cos(\varphi-\varphi_0)}\frac{1-i}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{w}e^{i\eta^2}d\eta,$$
$$w=-(\varphi-\varphi_0-\pi)\sqrt{\frac{kr}{2}}. \tag{74.7}$$

类似地，在反射波的“暗影”的边界 Oa 附近，有

$$u(r,\varphi)=e^{-ikr\cos(\varphi-\varphi_0)}+e^{-ikr\cos(\varphi+\varphi_0)}\times$$
$$\times\frac{1-i}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{w}e^{i\eta^2}d\eta,$$
$$w=-(\varphi+\varphi_0-\pi)\sqrt{\frac{kr}{2}}. \tag{74.8}$$

在这种近似下，衍射图样与波的偏振方向和楔的开度角无关。

(74.4)和(74.7)，(74.8)式的应用区域有一部分是重叠的。例如，在全影边界附近，共同的适用区域由下列不等式給出：

$$1\gg|\varphi-\varphi_0-\pi|\gg\frac{1}{\sqrt{kr}},$$

而且在这区域內，

$$u(r,\varphi)=u_0(r,\varphi)+\frac{1}{\sqrt{2\pi kr}}e^{i\left(kr+\frac{\pi}{4}\right)}\frac{1}{\varphi-\varphi_0-\pi}, \tag{74.9}$$

① 参閱“場論”第二版，§60。

u_0 从(74.6)式得出。当$|w|$大时，这个表达式可以从(74.7)式由应用菲涅耳积分的熟知的渐近公式而得到:

$$\int_{-\infty}^{w} e^{i\eta^2} d\eta=(1+i)\sqrt{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{2iw}e^{iw^2}, \quad \text{当 } w>0,$$

$$\int_{-\infty}^{w} e^{i\eta^2} d\eta=\frac{1}{2i\omega}e^{iw^2}, \quad \text{当 } w<0,$$

§ 75. 平面光屏上的衍射

在半平面上衍射的特殊情况下(这相应于 $\gamma=2\pi$)，楔衍射的精密公式(74.2)可以化为比较简单的形式[①]。即是(74.2)内的复数积分可以化为菲涅耳积分:

$$v(r, \psi)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-i\left(kr\cos\psi+\frac{\pi}{4}\right)}\int_{-\infty}^{w} e^{i\eta^2} d\eta,$$
$$w=\sqrt{2kr}\cos\frac{\psi}{2}. \tag{75.1}$$

这个公式当 r 和 ψ 为任何值时都正确。若$kr>1$和$|\psi-\pi|\gg 1/\sqrt{kr}$，則适合下面的渐近式:

$$v_d(r, \psi)=-e^{i\left(kr+\frac{\pi}{4}\right)}\frac{1}{2\sqrt{2\pi kr}\cos(\psi/2)}, \tag{75.2}$$

[公式(74.4)，令其中 $\gamma=2\pi$][②]

应用(75.2)式，可以在閉合形式下得到任何形状的理想导电平面光屏上衍射問題的解。这时只須假定光屏的綫度和至光屏的距离大于波长，而衍射角不大小(而且这区域和适用通常的菲涅耳

① 参閱 421 頁底注所指出的文献。

② Ю.В. 范拓庫罗夫(ЖЭТФ, 26, 3, 1954)得到了电磁波在半平面上衍射的三維問題的精密解，电磁波是由离半平面边緣有限距离处的任意取向的电偶极子和磁偶极子发射出来的。

公式的小角度区域重叠)。这結果可以表示为对光屏边緣的积分，类似于在通常的近似理論[①]中衍射場可以表示为对这样一个表面的积分，这表面遮蔽着光屏的小孔。我們在这里不去进行这种計算。

在理想导电平面光屏的精密衍射理論中，可以提出一个定理(由 Л. И. 曼捷耳希塔姆和 M. A. 列昂托維奇提出)，它在某种意义上类似于近似衍射理論中的巴比涅(Babinet)定理。

我們来研究具有一任意形状的小孔的平面光屏；选擇光屏的平面为 $z=0$ 的平面，并且假設电磁波从 $z<0$ 的一側射入。設 $\mathbf{E}_0$，$\mathbf{H}_0$ 为入射波与光屏上的反射波(仿佛小孔不存在)的合場；我們設想場延續到光屏的另一側 ($z>0$)。因为当 $z=0$ 时 $H_z=0, E_t=0$ (由于理想导电平面上的边界条件)，因而当 $z>0$ 和 $z<0$ 时的 $\mathbf{E}_0$，$\mathbf{H}_0$ 值的关系为

$$E_{0z}(x, y, z)=E_{0z}(x, y, -z), \quad \mathbf{E}_{0t}(x, y, z)=-\mathbf{E}_{0t}(x, y, -z), \tag{75.3}$$
$$H_{0z}(x, y, z)=-H_{0z}(x, y, -z), \quad \mathbf{H}_{0t}(x, y, z)=\mathbf{H}_{0t}(x, y, -z).$$

其次，設 $\mathbf{E}'$, $\mathbf{H}'$ 为在場 $\mathbf{E}_0$, $\mathbf{H}_0$ 内放入平面板而得到的場，平面板的形状，大小和位置与屏上的小孔相合，而且磁极化率为 $\mu=\infty$。于是屏上小孔衍射問題的解由下列表达式給出:

$$\mathbf{E}=\frac{1}{2}(\mathbf{E}_0+\mathbf{E}'), \quad \mathbf{H}=\frac{1}{2}(\mathbf{H}_0+\mathbf{H}'), \quad 当\ z<0,$$
$$\mathbf{E}=\frac{1}{2}(\mathbf{E}_0-\mathbf{E}'), \quad \mathbf{H}=\frac{1}{2}(\mathbf{H}_0-\mathbf{H}'), \quad 当\ z>0. \tag{75.4}$$

为了证明这一論断，我們注意到，場 $\mathbf{E}'$, $\mathbf{H}'$ 的对称性[由(75.3)式表示]和場 $\mathbf{E}_0$, $\mathbf{H}_0$ 的相同。所以在 $z=0$ 平面上，它滿足条件:

$$\mathbf{E}'_t=0, \qquad H'_z=0, \qquad 在小孔外,$$

① 参閱“場論”第二版，§ 59。

$$\mathbf{E}'_{t_1}=-\mathbf{E}'_{t_2},\quad \mathbf{H}'_{z_1}=-\mathbf{H}'_{z_2},\quad \text{在小孔上},$$

下角标 1 和 2 相应于 $z\to\pm 0$。此外，它满足条件：

$$E'_z=0,\quad \mathbf{H}'_t=0,\quad \text{在小孔上},$$

因为 $\mu=\infty$ 的物体面上的边界条件和理想导电 ($\varepsilon=\infty$) 面上的边界条件成倒易关系（指以 H, E 代换 E, H 而言）。由此看出，場(75.4)满足小孔外光屏面($z\to-0$)上的必要条件 $\mathbf{E}_t=0$, $H_z=0$, 并且在小孔上是連續的。最后，因为場 $\mathbf{E}',\mathbf{H}'$ 在无穷远处趋近于 $\mathbf{E}_0,\mathbf{H}_0$, 因而場(75.4)当 $z\to-\infty$时趋近于 $\mathbf{E}_0,\mathbf{H}_0$, 而 $z\to+\infty$时趋近于零。因此它满足衍射問題的全部条件，至此定理已完全证明。

由此可見，在 $\varepsilon=\infty$ 的光屏的小孔上的衍射問題等价于 $\mu=$ $=\infty$的互补光屏上的衍射問題。

例 題

1. 設单色平面波垂直入射到理想导电光屏上寬为 $2a$ 的狹縫上，这寬度大于波长。試求在大的衍射角下在狹縫后很远处光强度的分布。

解. 当 $a\gg\lambda$ 时，狹縫后的衍射場可以看成由狹縫两边緣上的独立衍射所产生的場叠加而成，幷且可利用漸近式(75.2)求出。当狹縫两边緣至观察点的距离 $AP=r_1$ 和 $BP=r_2$（图 35)大于 a 时，则在因子 e^{ikr_1} 和 e^{ikr_2} 内，可以令

$$r_1=r-a\sin\chi,\ r_2=r+a\sin\chi;$$

在其他各点处，我們假定 $r_1\cong\cong r_2\cong r$，而 AP、OP、BP 和 z 軸的夾角等于同一衍射角 χ。

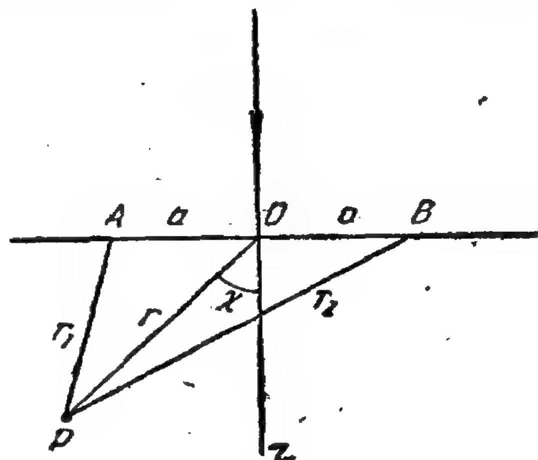


图 35

結果我們得到

$$u=\frac{e^{i\left(kr+\frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{2\pi kr}}\left\{\frac{\sin(ka\ \sin\chi)}{\sin\frac{\chi}{2}}\pm i\frac{\cos(ka\ \sin\chi)}{\cos\frac{\chi}{2}}\right\}.$$

由此得到在角 $d\chi$ 内衍射的光强度（相对于入射到狹縫上的光的总强度）为

$$dI=\frac{1}{4a\pi k}\left\{\left[\frac{\sin(ka\ \sin\chi)}{\sin\frac{\chi}{2}}\right]^2+\left[\frac{\cos(ka\ \sin\chi)}{\cos\frac{\chi}{2}}\right]^2\right\}d\chi=$$

$$=\frac{ka}{\pi}\left\{\left[\frac{\sin(ka\ \sin\chi)}{ka\ \sin\chi}\right]^2\cos\chi+\frac{1}{\left[2ka\cos\frac{\chi}{2}\right]^2}\right\}d\chi.$$

当 χ 小时，这公式变成狹縫上的夫琅和費衍射公式：

$$dI=\frac{1}{\pi ka}\frac{\sin^2(ka\chi)}{\chi^2}d\chi.$$

2. 設平面波入射到有一圓孔的理想导电平面上，圓孔的半徑 a 小于波长。試求通过圓孔的衍射光的强度（瑞利，1897）。

解. 按照正文內所述，这問題可以化为 $\mu=\infty$ 的圓薄片上的衍射問題，但因为 $a\ll\lambda$，因此，我們得到的是微粒上的散射問題。按照 § 72，要求出这种散射問題的解，必須求出圓盘上的靜电极化率和靜磁极化率。場 $\mathbf{E}_0$ 垂直于圓盘面，而边界条件 $E'_z=0$ 在形式上和靜电学中 $\varepsilon=0$ 的物体面上的边界条件相同。但場 $\mathbf{H}_0$ 平行于圓盘，而边界条件 $\mathbf{H}'_t$ 相应于 $\mu=\infty$ 的靜磁学問題。因此圓盘的电矩和磁矩为（参閱 § 4 例題 4 和 § 42 的例題）

$$\mathscr{P}=-\frac{2a^3}{3\pi}\mathbf{E}_0,\quad \mathscr{M}=\frac{4a^3}{3\pi}\mathbf{H}_0.$$

在过渡到圓孔上的衍射問題时，按照公式(75.4)，必須将这些式子乘上$\frac{1}{2}$，然后代入散射公式(72.1)内。

这样一来，在立体角 do 内的衍射光的强度为①

$$dI=\frac{c}{4\pi}\frac{\omega^4a^6}{9\pi^2c^4}\{[\mathbf{nE}_0]-2[\mathbf{n}[\mathbf{H}_0\mathbf{n}]\}^2do=$$

$$=\frac{c}{4\pi}\frac{\omega^4a^6}{9\pi^2c^4}\{[\mathbf{nE}_0]^2+4[\mathbf{nH}_0]^2+4\mathbf{n}[\mathbf{H}_0\mathbf{E}_0]\}do.$$

对半球面进行积分，得到衍射光的总强度等于

$$I=\frac{c}{4\pi}\frac{4\omega^4a^6}{27\pi c^4}(E_0^2+4H_0^2).$$

“有效衍射截面”定义为衍射輻射强度与入射波內的能通量密度之比$\left(\frac{cE^2}{4\pi},\right.$不帶下角标的字母指入射波場而言$\left.\right)$。我們区分入射波的两种偏振情况：

① 假定略去了因子 $e^{-i\omega t}$，于是 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{H}$ 为实数。

a) 入射波的矢量 **E** 垂直于入射平面(xz 平面)，也即是与光屏面(xy 平面)平行。光屏面上入射波場和反射波場之和为

$$E_0=0,\quad H_{0x}=2H\cos\alpha=2E\cos\alpha$$

(α为入射角)。由此得到

$$d\sigma=\frac{16a^6\omega^4}{9\pi^2c^4}\cos^2\alpha(1-\sin^2\vartheta\cos^2\varphi)do,$$

式中 ϑ 为衍射方向 **n** 与光屏法綫方向 (z 軸) 之間的夹角，而 φ 为矢量 **n** 相对于入射面的方位角。总截面为

$$\sigma=\frac{64a^6\omega^4}{27\pi c^4}\cos^2\alpha.$$

b) 矢量 **E** 在入射平面內。于是

$$E_0=E_{0z}=-2E\sin\alpha,\quad H_0=H_{0y}=2H=2E.$$

微分有效截面为

$$d\sigma=\frac{16a^6\omega^4}{9\pi^2c^4}\left\{\cos^2\vartheta+\sin^2\vartheta\left(\cos^2\varphi+\frac{1}{4}\sin^2\alpha\right)-\sin\vartheta\sin\alpha\cos\varphi\right\}do,$$

总截面为

$$\sigma=\frac{64a^6\omega^4}{27\pi c^4}\left(1+\frac{\sin^2\alpha}{4}\right).$$

对于自然入射光，

$$\sigma=\frac{64a^6\omega^4}{27\pi c^4}\left(1-\frac{3}{8}\sin^2\alpha\right).$$

第十一章　各向異性媒质內的电磁波

§76. 晶体的介电常数

各向异性媒质相对于电磁波的性质，由張量 $\varepsilon_{ik}(\omega)$ 和 $\mu_{ik}(\omega)$ 定出，这两个張量給出感应强度和場强度之間的关系为[①]

$$D_i=\varepsilon_{ik}(\omega)E_k,\qquad B_i=\mu_{ik}(\omega)H_k.$$

下面为明确起見，我們来研究电場和張量 ε_{ik}；所得到的全部結果也完全适用于張量 μ_{ik}。

当 $\omega\to 0$ 时，ε_{ik} 趋近于其靜态值，在 §13 內曾經证明它們对下角标 i 和 k 是对称的。这种证明純粹是热力学性质的，因而只适用于热力学平衡态。在交变場內，物质的状态当然不是平衡态，因而上述的证明不能应用。为了說明張量 ε_{ik} 的性质，我們現在必須应用推广的动力系数对称原理（§88）。

容易看出，張量 ε_{ik} 的分量包括在 §88 內出現的 α_{ab} 的普遍定义下。为此，我們注意到，交变电場內的能量变化率由下列积分給出：

$$\int\frac{1}{4\pi}\mathbf{E}\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}\,dV.\tag{76.1}$$

与公式(88.6)比較，我們將看到，如果选擇物体每一点处的矢量 $\mathbf{E}$ 的分量为量 x_a，則相应的量 f_a 將是矢量 $\mathbf{D}$ 的分量（下角标 a 取一系列的連續值，标記着矢量分量和物体上的点）。这时系数 α_{ab} 为張量 ε^{-1}_{ik} 的分量。逆張量(ε^{-1}_{ik})和張量(ε_{ik})的对称性质当然是相同的。

---

① 我們記住，全部量都是指波內的交变場而言；可能出現的恒定感应强度（在压电或铁磁晶体內）与这里所討論的問題沒有关系。

我們注意到，在同一定义下还包括整个物体的极化率張量的分量，也即是下列等式內的系数：

$$\mathscr{P}_i = V\alpha_{ik}\mathfrak{E}_k.$$

实际上，带入外交变場 $\mathfrak{E}$ 內的物体的能量变化率由下列公式得出

$$-\mathscr{P}\frac{d\mathfrak{E}}{dt}. \tag{76.2}$$

由此看出，若量 x_a 是張量 $\mathscr{P}$ 的三个分量，則相应的量 f_a 为矢量 $\mathfrak{E}$ 的分量，于是系数 α_{ab} 和 $V\alpha_{ik}$ 相等。

这样一来，我們可以应用 § 88 內所得到的由 (88.12)式所表示的动力系数的广义对称原理，幷得到結論为：張量 ε_{ik} 是对称的：

$$\varepsilon_{ik} = \varepsilon_{ki}; \tag{76.3}$$

这时我們假定物体不在外磁場內①。

对各向异性情况，重复 § 61 內对(61.4)式的推导过程，我們得到电能損失由下式給出：

$$\frac{i\omega}{8\pi}(\varepsilon_{ik}^* - \varepsilon_{ki})E_iE_k^*. \tag{76.4}$$

吸收不存在的条件是 $\varepsilon_{ik}^* = \varepsilon_{ki} = \varepsilon_{ik}$，也即是和各向同性情况一样，$\varepsilon_{ik}$ 必須为实数。

当吸收不存在时，如在 § 61 中所見到的，可以求出物体单位体积的內电磁能。对各向异性媒质重复(61.9)式的推导，我們得到类似的公式：

$$\bar{U} = \frac{1}{16\pi}\frac{d}{d\omega}(\omega\varepsilon_{ik})E_i^*E_k. \tag{76.5}$$

在 § 67 內曾引进了"表面阻抗"ζ 这一概念，利用它，当介电常数的概念失去意义时，也可以表述出金屬面上的边界条件。在各向异性物体表面上，边界条件类似于(67.6)式，必須写成

$$E_\alpha = \zeta_{\alpha\beta}[\mathbf{Hn}]_\beta, \tag{76.6}$$

① 存在外磁場时的張量 ε_{ik} 的性质，将在 § 82 內研究。

式中 $\zeta_{\alpha\beta}(\omega)$ 为物体表面上的二維張量。应該注意到，这張量的数值也与晶面的晶体学取向有关。

流入物体內部的能通量为

$$\frac{1}{4\pi}[\mathbf{EH}]\mathbf{n}=\frac{c}{4\pi}\mathbf{E}[\mathbf{Hn}]=\frac{c}{4\pi}E_\alpha[\mathbf{Hn}]_\alpha$$

(式中 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{H}$ 为实数)。由此看出，若应用动力系数对称原理时选擇分量 E_α 为量 x_a，則相应的量 f_a 将是 $-[\mathbf{Hn}]_\alpha$，也即是量 f_a 将是 $-(i/\omega)[\mathbf{Hn}]_\alpha$(回到复数表示)。因此，系数 α_{ab}，除了一个因子外，和系数 $\zeta_{\alpha\beta}$ 相等，于是我們得到結論为

$$\zeta_{\alpha\beta}=\zeta_{\beta\alpha}, \tag{76.7}$$

这时不存在外磁場。

例 題

試将張量 $\zeta_{\alpha\beta}$ 的分量用張量 $\eta_{\alpha\beta}\equiv\varepsilon^{-1}_{\alpha\beta}$ 的分量来表示(假定后者存在)；物体是非磁性的($\mu_{ik}=\delta_{ik}$)。

解. 在各向异性媒质內，等式(67.2) $\zeta^2=1/\varepsilon$ 必須用下式来代替：

$$\zeta_{\alpha\gamma}\zeta_{\gamma\beta}=\eta_{\alpha\beta}.$$

写成分量①：

$$\zeta_{11}^2+\zeta_{12}\zeta_{21}=\eta_{11},\quad \zeta_{22}^2+\zeta_{12}\zeta_{21}=\eta_{22},$$
$$\zeta_{12}(\zeta_{11}+\zeta_{22})=\eta_{12},\quad \zeta_{21}(\zeta_{11}+\zeta_{22})=\eta_{21}.$$

这些方程的解为

$$\zeta_{12}=\frac{\eta_{12}}{\xi},\quad \zeta_{21}=\frac{\eta_{21}}{\xi},$$

$$\zeta_{11}=\frac{1}{\xi}[\eta_{11}\pm\sqrt{\eta_{11}\eta_{22}-\eta_{12}\eta_{21}}],\quad \zeta_{22}=\frac{1}{\xi}[\eta_{22}\pm\sqrt{\eta_{11}\eta_{22}-\eta_{12}\eta_{21}}]$$

$$(\xi^2=\eta_{11}+\eta_{22}\pm2\sqrt{\eta_{11}\eta_{22}-\eta_{12}\eta_{21}}),$$

正負号的选擇决定于能量的吸收必須为正的条件。

---

① 我們沒有假定 $\zeta_{12}=\zeta_{21}$，这样一来，也可以考慮到外磁場出現的情況。

§ 77. 各向异性媒质內的平面波

研究各向异性物体——晶体——的光学时，我們只限于研究一种最重要的情况，即在給定的頻率区域內，可以假定媒质是非磁性的和透明的。于是电場强度和磁場强度与其感应强度之間的关系为

$$D_i = \varepsilon_{ik} E_k, \quad \mathbf{B} = \mathbf{H}, \tag{77.1}$$

而且介电張量 ε_{ik} 的全部分量都是实数，而这張量的主値为正的。

单色波場的麦克斯韦方程为

$$i\omega \mathbf{H} = c \operatorname{rot} \mathbf{E}, \; i\omega \mathbf{D} = -c \operatorname{rot} \mathbf{H}. \tag{77.2}$$

对在透明媒质內傳播的平面波，全部量都与 $e^{i\mathbf{kr}}$ 成正比，其中 $\mathbf{k}$ 为实数波矢量。对坐标求微分后，我們得到

$$\frac{\omega}{c}\mathbf{H} = [\mathbf{kE}], \quad \frac{\omega}{c}\mathbf{D} = -[\mathbf{kH}]. \tag{77.3}$$

由此首先看出，$\mathbf{k}$, $\mathbf{D}$ 和 $\mathbf{H}$ 这三个矢量是相互垂直的。此外，矢量 $\mathbf{H}$ 与矢量 $\mathbf{E}$ 垂直。因为矢量 $\mathbf{H}$ 同时与三个矢量 $\mathbf{D}, \mathbf{E}, \mathbf{k}$ 垂直，因而这些矢量都在一个平面內。图 36 表示这三个矢量的相互位置。相对于波矢量的方向而言，$\mathbf{D}$ 和 $\mathbf{H}$ 是横向的，但 $\mathbf{E}$ 不是横向的。图 36 还指出了波內的能通量 $\mathbf{S}$ 的方向，这方向决定于矢积 $[\mathbf{EH}]$，也即是它垂直于 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{H}$。与各向同性媒质內的波不同，在这里能通量的方向不与波矢量方向相同。由此可見，矢量 $\mathbf{S}$ 与矢量 $\mathbf{E}, \mathbf{D}, \mathbf{k}$ 是共平面的，并且和矢量 $\mathbf{k}$ 組成的角度等于 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{D}$ 間的夹角。

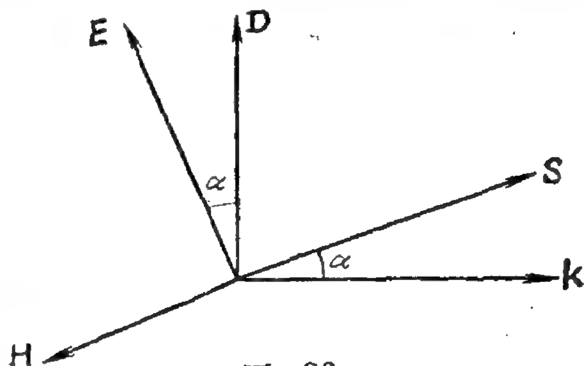


图 36

我們从矢量 k 的絕对值中分出因子$\frac{\omega}{c}$，并写为

$$\mathbf{k}=\frac{\omega}{c}\mathbf{n}, \tag{77.4}$$

在各向异性媒质內，这样所定义的矢量 n 的絕对值，与它的方向有关；这与各向同性媒质不同，其中 $n=\sqrt{\varepsilon}$ 只依賴于頻率[1]，利用(77.4)的符号，基本公式(77.3)可以写为

$$\mathbf{H}=[\mathbf{nE}],\quad \mathbf{D}=-[\mathbf{nH}]. \tag{77.5}$$

我們再写出平面波內能通量矢量的表达式：

$$\mathbf{S}=\frac{c}{4\pi}[\mathbf{EH}]=\frac{c}{4\pi}\{\mathbf{n}E^2-\mathbf{E}(\mathbf{En})\} \tag{77.6}$$

(在这公式內 E 和 H 均为实数)。

到此为止，我們还未利用含有物质常数 ε_{ik} 的关系式(77.1)，結合利用这个关系式与(77.5)式，就可以求出函数 $\omega(\mathbf{k})$。

将(77.5)式的第一式代入第二式，我們得到

$$\mathbf{D}=[\mathbf{n}[\mathbf{En}]]=n^2\mathbf{E}-\mathbf{n}(\mathbf{nE}), \tag{77.7}$$

如果根据(77.1)式，令这矢量的分量等于 $\varepsilon_{ik}E_k$，則对于矢量 E 的三个分量，我們得到三个綫性齐次方程：

$$n^2E_i-n_in_kE_k=\varepsilon_{ik}E_k,$$

或者

$$(n^2\delta_{ik}-n_in_k-\varepsilon_{ik})E_k=0. \tag{77.8}$$

这些方程联立的条件，需要由它們的系数所組成的行列式变为零：

$$|n^2\delta_{ik}-n_in_k-\varepsilon_{ik}|=0. \tag{77.9}$$

选用張量 ε_{ik} 的主軸(为此称为主介电軸)作为笛卡儿坐标軸 x, y, z，这个行列式就可以方便地实际計算出来。張量的主值以 $\varepsilon^{(x)}, \varepsilon^{(y)}, \varepsilon^{(z)}$表示，由簡单的計算得到下列方程：

[1] 量 n 在这里也仍称为"折射率"，虽然它現在与折射定律的关系不如各向同性物体內那样簡单。

$$n^2(\varepsilon^{(x)}n_x^2+\varepsilon^{(y)}n_y^2+\varepsilon^{(z)}n_z^2)-[n_x^2\varepsilon^{(x)}(\varepsilon^{(y)}+\varepsilon^{(z)})+$$
$$+n_y^2\varepsilon^{(y)}(\varepsilon^{(x)}+\varepsilon^{(z)})+n_z^2\varepsilon^{(z)}(\varepsilon^{(x)}+\varepsilon^{(y)})]+\varepsilon^{(x)}\varepsilon^{(y)}\varepsilon^{(z)}=0. \tag{77.10}$$

我們注意到，高次項(n_i 的六次項)在行列式展开后已被相互消去；这种情况当然不是偶然的，这归根到底是因为波只有两个独立偏振方向，而不是三个独立偏振方向。

方程(77.10)称为菲涅耳方程，是晶体光学的基本方程之一。它非显式地确定色散定律，也即是頻率与波矢量間的关系[应該記住，$\varepsilon^{(i)}$的主值是頻率的函数，而在某些情况下(参閱 § 79)，張量 ε_{ik} 的主軸方向也是如此]。但是通常在研究单色波时，頻率以及全部的 $\varepsilon^{(i)}$ 都是給定的常数，于是方程(77.10)給出波矢量的絕对值为其方向的函数。当 **n** 的方向給定时，(77.10) 式为 n^2 的二次方程，其系数为实数。因此在普遍情况下，相应于 **n** 的每一方向，波矢量有二个不同的絕对值。

(77.10)式(系数 $\varepsilon^{(i)}$ 为常数)在 n_x，n_y，n_z 坐标系內定出一个表面——“波矢量面”①。在普遍情况下，这是一个四次面，我們将在下一节內进行詳細的研究。这里我們只是指出它的一些重要的普遍性质。

首先，我們再引入表征在各向异性媒质內傳播的光的一个量。光綫的方向(在几何光学內)由群速度矢量$\frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{k}}$决定。在各向同性媒质內，这个矢量的方向常常和波矢量方向相合；但在各向异性媒质內，一般說来并不是如此。为了表征光綫的特征，我們引入矢量 **s**，它的方向和群速度方向相同，但其絕对值由下式得出：

$$\mathbf{ns}=1. \tag{77.11}$$

① 在文献內，通常采用一个不很方便的概念——“法綫面”(或“指数面”)，当在每一方向所取的綫段不是等于 n 而是等于它的倒数$\frac{1}{n}$就得到这概念。

我們称 $\mathbf{s}$ 为光綫矢量。这个量的意义說明如下。

我們来研究从某一中心向各方向傳播的一束光綫(其頻率相同)。在光綫的每一点处，光程函数 ψ(除去因子 ω/c 外，它与波相相同，参閱 §65)的数值由沿光綫方向所取的积分 $\int \mathbf{n}\,d\mathbf{l}$ 給出。引入确定光綫方向的矢量 $\mathbf{s}$ 后，我們可以写为

$$\psi=\int \mathbf{n}\,d\mathbf{l}=\int \frac{\mathbf{ns}}{s}dl=\int \frac{dl}{s}.$$

在均匀媒质內，s 沿光綫方向不变，因而 $\psi=L/s$，式中 L 为所研究的一段光綫的长度。由此看出，如果从光束中心向每一半徑方向取一綫段等于 s(或与 s 成正比)，則我們得到一个面，在这面的每一点上，光綫是同相的。这个面称为射綫面。

这样引入的波矢量面和射綫面成为奇异的"二象"关系。我們把波矢量面的方程写为 $f(k_x, k_y, k_z, \omega)=0$。于是群速度矢量的分量为

$$\frac{\partial\omega}{\partial k_i}=-\frac{\dfrac{\partial f}{\partial k_i}}{\dfrac{\partial f}{\partial \omega}}, \tag{77.12}$$

也即是与导数 $\partial f/\partial k_i$ 成正比，或者同样地与导数 $\partial f/\partial n_i$ 成正比(因为取这导数时 ω 为常数)。因此射綫矢量的分量也与 $\dfrac{\partial f}{\partial n_i}$ 成正比[①]。但矢量 $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{n}}$ 垂直于表面 $f=0$。由此可見，我們得到的結果为：$\mathbf{n}$ 取給定値的波的射綫矢量方向，为波矢量面上相应点处的法

---

① 将(77.10)式的左側对 n_i 求微分，并求出 s_i 和 $\partial f/\partial n_i$ 間的比例系数后，从条件 $\mathbf{ns}=1$，我們得到矢量 $\mathbf{s}$ 和 $\mathbf{n}$ 間的关系为

$$s_x=n_x\frac{\varepsilon^{(x)}(\varepsilon^{(y)}+\varepsilon^{(z)})-2\varepsilon^{(x)}n_x^2-(\varepsilon^{(x)}+\varepsilon^{(y)})n_y^2-(\varepsilon^{(x)}+\varepsilon^{(z)})n_z^2}{2\varepsilon^{(x)}\varepsilon^{(y)}\varepsilon^{(z)}-n_x^2\varepsilon^{(x)}(\varepsilon^{(y)}+\varepsilon^{(z)})-n_y^2\varepsilon^{(y)}(\varepsilon^{(x)}+\varepsilon^{(z)})-n_z^2\varepsilon^{(z)}(\varepsilon^{(x)}+\varepsilon^{(y)})} \tag{77.12a}$$

对 s_y 和 s_z，有相似的式子。

綫方向。

容易看出,倒过来的說法也是正确的:射綫面的法綫方向給出相应的波矢量的方向。实际上,$\mathbf{s}$ 与波矢量面垂直,可用下列关系式表示:

$$\mathbf{s}\,\delta\mathbf{n}=0,$$

式中 $\delta\mathbf{n}$ 为 $\mathbf{n}$ 的无穷小变化(保持 ω 为給定),也即是波矢量面上的无穷小位移矢量。但是对等式 $\mathbf{ns}=1$ 求微分(也保持 ω 为給定),我們得到 $\mathbf{n}\delta\mathbf{s}+\mathbf{s}\,\delta\mathbf{n}=0$,由此看出

$$\mathbf{n}\,\delta\mathbf{s}=0,$$

因此证明了上述的說法。

上述的 $\mathbf{n}$ 面与 $\mathbf{s}$ 面間的关系,还可以进一步精确化。設 $\mathbf{n}_0$ 为波矢量面上某一点的半徑矢量,而 $\mathbf{s}_0$ 为与它相应的射綫矢量。我們写出(在 n_x, n_y, n_z 坐标內)这一点处的切向平面方程为

$$\mathbf{s}_0(\mathbf{n}-\mathbf{n}_0)=0,$$

这表示 $\mathbf{s}_0$ 与这面上的任一矢量 $\mathbf{n}-\mathbf{n}_0$ 垂直。因此 $\mathbf{s}_0$ 和 $\mathbf{n}_0$ 的关系式为 $\mathbf{s}_0\mathbf{n}_0=1$,因而这个方程可以写为

$$\mathbf{s}_0\mathbf{n}=1. \qquad (77.13)$$

由此看出,$1/s_0$ 是从坐标原点至波矢量面上 $\mathbf{n}_0$ 点处的切向平面的垂直綫长度。

反过来,如果在射綫面的某一点 $\mathbf{s}_0$ 处作一切向平面,则从坐标原点至这切向平面的垂直綫长度等于 $1/n_0$。

我們現在来說明射綫矢量相对于波內場强矢量的位置。为此我們注意到,群速度方向总是和平均(对时間平均)能通量矢量方向相合。实际上,我們来研究在空間某一小区域內的波包。显然,当波包移动时,集中在波包內的能量必須与波包一起移动,而这表明了能通量的方向与波包速度的方向相合,也即是群速度的方向

相合①。

因为坡印廷矢量与 **H** 和 **E** 垂直，因而我們得到結論：这对于矢量 **s** 也是一样的：

$$\mathbf{sH}=0,\quad \mathbf{sE}=0. \tag{77.14}$$

利用公式(77.5)，(77.11)和(77.14)，由直接計算得到关系式为

$$\mathbf{H}=[\mathbf{sD}],\quad \mathbf{E}=-[\mathbf{sH}]. \tag{77.15}$$

例如，

$$[\mathbf{sH}]=[\mathbf{s}[\mathbf{nE}]]=\mathbf{n}(\mathbf{sE})-\mathbf{E}(\mathbf{ns})=-\mathbf{E}.$$

如果将(77.15)式与(77.5)式比較，我們看到，利用下面的代换：

$$\mathbf{D}\ \text{代换}\ \mathbf{E},\ \mathbf{E}\ \text{代换}\ \mathbf{D},\ \mathbf{s}\ \text{代换}\ \mathbf{n},\ \varepsilon_{ik}^{-1}\ \text{代换}\ \varepsilon_{ik}, \tag{77.16}$$

可以从其中一式得到另一式(当然关系式 $\mathbf{ns}=1$ 不遭到破坏)。引入上面最后一个代换，是为了使 **D** 与 **E** 的关系式(77.1)仍然有效。这样一来，可以提出下面一个对各种計算非常有用的規則：如果某一方程对上述的一組量正确，則由(77.16)的代换，可以得到对另一組量正确的类似方程。

特別是，把这一規則应用到(77.10)式上，可立即得到矢量 **s**

---

① 由数学方法容易证明，群速度的方向与坡印廷矢量的方向相合。对(77.5)式求微分(保持 ω 不变)，我們得到

$$\delta\mathbf{D}=[\delta\mathbf{H}\cdot\mathbf{n}]+[\mathbf{H}\delta\mathbf{n}],\quad \delta\mathbf{H}=[\mathbf{n}\delta\mathbf{E}]+[\delta\mathbf{n}\cdot\mathbf{E}].$$

用 **E** 标乘第一式，**H** 标乘第二式：

$$\mathbf{E}\delta\mathbf{D}=\mathbf{H}\delta\mathbf{H}+[\mathbf{EH}]\delta\mathbf{n},\quad \mathbf{H}\delta\mathbf{H}=\mathbf{D}\delta\mathbf{E}+[\mathbf{EH}]\delta\mathbf{n}.$$

但 $\mathbf{D}\delta\mathbf{E}=\varepsilon_{ik}E_k\delta E_i=\mathbf{E}\delta\mathbf{D}$；因此将两式相加后，我們得到

$$[\mathbf{EH}]\delta\mathbf{n}=0,$$

也即是矢量 $[\mathbf{EH}]$ 垂直于波矢量面，这就是所要证明的。

这样得到的結果也指能通量的瞬时值，而不仅是指平均值。但是在上述证明中，主要是利用了張量 ε_{ik} 的对称性。因此，在这种形式下，对 ε_{ik} 为非对称性的媒质(旋性媒质，参閱 §82)，这結果不再是正确的。这种說法对坡印廷矢量的平均值也仍然正确。

的类似方程:

$$s^2(\varepsilon^{(y)}\varepsilon^{(z)}s_x^2+\varepsilon^{(x)}\varepsilon^{(z)}s_y^2+\varepsilon^{(x)}\varepsilon^{(y)}s_z^2)-[s_x^2(\varepsilon^{(y)}+\varepsilon^{(z)})+$$

$$+s_y^2(\varepsilon^{(x)}+\varepsilon^{(z)})+s_z^2(\varepsilon^{(x)}+\varepsilon^{(y)})]+1=0. \qquad (77.17)$$

由这一方程可求出射綫面的形状。和波矢量面一样，它也是一个四次面。当 **s** 的方向給定时，(77.17)式为 s^2 的二次方程，它在普遍情况下有二个不同的实根。由此可見，在晶体內，每一方向可以有波矢量不同的两条射綫傳播。

我們現在来研究在各向异性媒质內傳播的波的偏振的特征問題。推导出菲涅耳方程的(77.8)式不适合于这一目的，因为其中包含有場强 **E**，而感应强度 **D** 在波內是横向的（对給定的 **n** 而言）。为了一开始就計及矢量 **D** 的横向性，我們暫时选擇一个新坐标系，它的一个軸沿波矢量方向。两个横向軸用希腊字母作下角标表示，它們取的值为 1, 2。由(77.7)式的横向分量給出 $D_\alpha=n^2E_\alpha$; 代入 $E_\alpha=\varepsilon_{\alpha\beta}^{-1}D_\beta$（其中 $\varepsilon_{\alpha\beta}^{-1}$ 为强量 ε_{ik} 的逆張量的分量），于是我們得到 $D_\alpha-n^2\varepsilon_{\alpha\beta}^{-1}D_\beta=0$, 或者

$$\left(\frac{1}{n^2}\delta_{\alpha\beta}-\varepsilon_{\alpha\beta}^{-1}\right)D_\beta=0. \qquad (77.18)$$

这两个带有未知量 D_1 和 D_2 的方程($\alpha=1, 2$)的联立条件，是它們的行列式等于零。当然，这条件和用原来坐标系 x, y, z 写出的菲涅耳方程相同。但是我們現在看到，与这两个 n 值相对应的矢量 **D** 的方向指向二秩的二維对称張量 $\varepsilon_{\alpha\beta}^{-1}$的主軸方向。按照普遍定理，由此得出，这些矢量互相垂直。由此可見，在波矢量方向相同的两个波內，电感应矢量在两个互相垂直的平面內綫偏振化。

(77.18)式有一个簡单的几何解釋。我們在 x, y, z 坐标系內（重新化回到主介电軸）作一个相应于張量 ε_{ik}^{-1} 的張量椭球，也即是作一个表面:

$$\varepsilon_{ik}^{-1}x_i x_k=\frac{x^2}{\varepsilon^{(x)}}+\frac{y^2}{\varepsilon^{(y)}}+\frac{z^2}{\varepsilon^{(z)}}=1 \tag{77.19}$$

(图 37)。我們令这个橢球与通过橢球中心并与給定的 n 方向垂直的平面相截。在普遍情况下,这截面为一橢园;它的主軸长定出 n 值,而它們的方向决定相应的振动方向(矢量 D)。

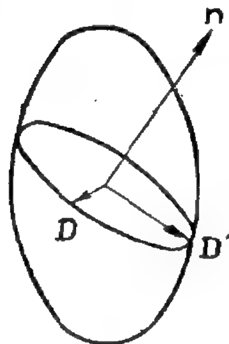


图 37

从这作图中(在 $\varepsilon^{(x)}$, $\varepsilon^{(y)}$, $\varepsilon^{(z)}$ 不相同的普遍情况下)可以直接看出,特別是如果波矢量的方向例如沿 x 軸,則 D 的偏振方向将沿 y 軸和 z 軸方向。如果矢量 n 在一个坐标平面內,例如在 xy 平面內,則有一个偏振方向也在該平面內,而另一个偏振方向与它垂直。

射綫矢量方向相同的两个波的偏振有完全类似的性质。在这里代替感应强度 D 的方向,我們必須考虑对 s 为横向的矢量 E 的方向,同时对(77.18)式,我們必須代以类似的方程:

$$\left(\frac{1}{s^2}\delta_{\alpha\beta}-\varepsilon_{\alpha\beta}\right)E_\beta=0. \tag{77.20}$$

在这种情况下是利用張量橢球:

$$\varepsilon_{ik}x_i x_k=\varepsilon^{(x)}x^2+\varepsilon^{(y)}y^2+\varepsilon^{(z)}z^2=1. \tag{77.21}$$

进行几何作图,这張量橢球与張量 ε_{ik} 本身相对应(称为菲涅耳橢球)。

应該着重指出,在各向异性媒质內傳播的平面波,在一定的平面內完全是綫偏振的。在这方面,各向异性媒质的光学性质,大大地不同于各向同性媒质的性质。在各向同性媒质內傳播的平面波,在普遍情况下是橢圓偏振的,而且只是在特殊情况下,橢圓偏振才变成綫偏振的。这种重大的差別是由于,媒质的完全各向同性情况在某种意义上是簡并的:两个偏振方向对应于同一个波矢

量，而在各向异性媒質內，在普遍情况下有两个不同的波矢量(方向相同)。当以同一的 n 值傳播时，二个綫偏振波幷合而成为一橢圓偏振波。

§ 78. 单軸晶体的光学性質

晶体的光学性質首先依賴于介电張量 ε_{ik} 的对称性。从这方面看来，全部的晶体可以分出三类——立方的、单軸的和双軸的(参閱 § 13)。

在立方系晶体內，$\varepsilon_{ik}=\varepsilon\delta_{ik}$，也即是張量的三个主值相等，而主軸的方向完全是任意的。因此就光学性質来說，立方系晶体一般說来与各向同性物体无差别。

单軸晶体包括菱面系、正方系和六角系。在这种晶体內，張量 ε_{ik} 有一个主軸分別与三次、四次或六次的对称軸相合。这軸在光学中称为晶体的光学軸(下面我們选擇这軸为 z 軸，而相应的張量 ε_{ik} 的主值，我們以 $\varepsilon_{\parallel}$ 表示之)。其他两个主軸的方向(在垂直于光学軸的平面內)是任意的，而相应的介电張量的主值相等(在下面把它們表示为 $\varepsilon_{\perp}$)。

如果在菲涅耳方程(77.10)內，令 $\varepsilon^{(x)}=\varepsilon^{(y)}=\varepsilon_{\perp}$，$\varepsilon^{(z)}=\varepsilon_{\parallel}$，則它左側的式子分解为二个二次的因子：

$$(n^2-\varepsilon_{\perp})[\varepsilon_{\parallel}n_z^2+\varepsilon_{\perp}(n_x^2+n_y^2)-\varepsilon_{\perp}\varepsilon_{\parallel}]=0,$$

換句話說，四次方程分解为两个二次方程：

$$n^2=\varepsilon_{\perp} \tag{78.1}$$

$$\frac{n_z^2}{\varepsilon_{\perp}}+\frac{n_x^2+n_y^2}{\varepsilon_{\parallel}}=1. \tag{78.2}$$

这在几何上表明：波矢量面(在普遍情况下为四次面)分解为两个分开的面——球面和橢球面。图 38 所示为这些面的纵剖面。这里有两种情况是可能的：若 $\varepsilon_{\perp}>\varepsilon_{\parallel}$，則球在橢球外，若 $\varepsilon_{\perp}<\varepsilon_{\parallel}$，則

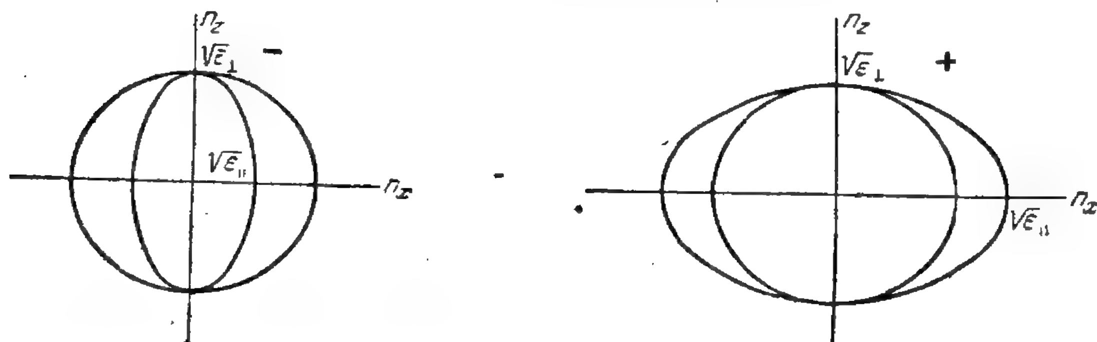


图 38

球在橢球內，在第一种情况下，单軸晶体称为负晶体，而在第二种情况下，称为正晶体。这两个面相切于两点——n_z 軸上的两个极点。換句話說，光学軸方向只对应于波矢量的一个值。

射綫面有完全相似的形状。根据定則(77.16)，在(78.1)和(78.2)內，以 $\mathbf{s}$ 代换 $\mathbf{n}$，$\frac{1}{\varepsilon}$代换 ε，我們即得到射綫面方程:

$$s^2=\frac{1}{\varepsilon_\perp} \tag{78.3}$$

$$\varepsilon_\perp s_z^2+\varepsilon_\parallel(s_x^2+s_y^2)=1. \tag{78.4}$$

在正晶体內，橢球在球內，而在負晶体內，橢球在球外。

于是，我們看到，在单軸晶体內可以傳播两种类型的波。对其中一种波(称为寻常波)，晶体的行为类似于折射率为$n=\sqrt{\varepsilon_\perp}$的各向同性物体。波矢量的絕对值等于$\frac{\omega n}{c}$，而与它的方向无关，射綫矢量的方向則和 $\mathbf{n}$ 的方向相合。

在第二种波內(称为非常波)，波矢量的数值依賴于它和光学軸所成的夹角 θ。按照(78.2)，

$$\frac{1}{n^2}=\frac{\sin^2\theta}{\varepsilon_\parallel}+\frac{\cos^2\theta}{\varepsilon_\perp}. \tag{78.5}$$

非常波的射綫矢量方向和波矢量方向不相合，但是在通过光学軸的同一平面內，这个平面称为 $\mathbf{n}$ 的主截面。設这平面为 zx 平面；将(78.2)式的左側对 n_z 和 n_x 求微分，并取这些导数的比值后，我

們得到射綫矢量的方向为

$$\frac{s_x}{s_z}=\frac{\varepsilon_{\perp}n_x}{\varepsilon_{\parallel}n_z}.$$

換句話說，射綫矢量和光学軸間的夹角 θ' 与 θ 角形成簡单的关系：

$$\mathrm{tg}\theta'=\frac{\varepsilon_{\perp}}{\varepsilon_{\parallel}}\mathrm{tg}\theta. \qquad (78.6)$$

只对沿光学軸和与光学軸垂直傳播的波，**n** 和 **l** 的方向才重合。

寻常波和非常波的偏振方向問題，可以很簡单地解决。为此只要注意到，在每种波內，四个矢量 **E**, **D**, **s**, **n** 总是共平面的。在非常波內，**s** 和 **n** 不在同一方向，但在同一主截面內。因此，这种波偏振化时使矢量 **E** 和 **D** 与 **s** 和 **n** 位于同一主截面內。另一方面，**n** 方向相同的寻常波和非常波內的矢量 **D**(或者 **s** 方向相同的矢量 **E**)互相垂直。因此，寻常波的偏振化使 **E** 和 **D** 位于垂直于主截面的平面內。

在光学軸方向傳播的波是一种例外。在这个方向上，寻常波和非常波之間的差别消失，因而它們的偏振叠加起来，在普遍情况下給出橢圓偏振波。

入射到晶体表面上的平面波的折射現象，和在两种各向同性媒质交界面上的折射現象大不相同，但折射定律和反射定律在这里仍可以从波矢量与分界面相切的切向分量 $\mathbf{n}_t$ 的連續性条件而得到。因此，折射波和反射波的波矢量都在入射平面內。但是这时在晶体內同时产生两种不同的折射波，称为双折射現象，它們相应于 $\mathbf{n}_t$ 給定时由菲涅耳方程所給出的法向分量 n_n 的两个可能值。此外，必須記住，所观察到的射綫傳播方向，不是由波矢量而是由射綫矢量 **s** 决定。它与 **n** 的方向不同，而且在普遍情况下，位于入射平面外。

在单軸晶体內折射时产生寻常和非常折射波。第一种波完全

类似于各向异性物体內的寻常折射波；特別是，它的射綫矢量(方向和波矢量方向相合)在入射平面內。但非常波的射綫矢量方向，一般說来，不在入射平面內。

例 題

1. 試求出光从眞空內入射到单軸晶体面上折射时非常射綫的方向，晶体面与它的光学軸垂直。

解. 在现在的情况下，折射光綫仍在入射平面內(选擇它为 xz 平面，z 軸垂直于表面)。折射时波矢量的 x 分量 $n_x=\sin\vartheta$(ϑ 为入射角)保持不变。折射波的 n_z 分量，从(78.2)式求得为

$$n_z=\sqrt{\varepsilon_\perp-\frac{\varepsilon_\perp}{\varepsilon_\parallel}\sin^2\vartheta}.$$

于是从(78.6)式求出折射光綫的方向为(ϑ' 为折射角)

$$\operatorname{tg}\vartheta'=\frac{\varepsilon_\perp n_x}{\varepsilon_\parallel n_z}=\frac{\sqrt{\varepsilon_\perp}\sin\vartheta}{\sqrt{\varepsilon_\parallel(\varepsilon_\parallel-\sin^2\vartheta)}}.$$

2. 試求出光綫垂直入射到单軸晶体面上时非常光綫的方向，单軸晶体的光学軸取任意方向。

解. 折射光綫在 xz 平面內，这平面通过表面的法綫(z 軸)和光学軸；設光学軸与法綫間的夹角为 α。于是射綫矢量 $\mathbf{s}$[其分量与(78.2)式左側对 $\mathbf{n}$ 的相应分量的导数成正比]与下式成正比：

$$\mathbf{s}\sim\frac{\mathbf{n}}{\varepsilon_\parallel}+(\mathbf{nl})\mathbf{l}\left(\frac{1}{\varepsilon_\perp}-\frac{1}{\varepsilon_\parallel}\right),$$

式中 $\mathbf{l}$ 为光学軸方向的单位矢量。在现在的情况下，波矢量 $\mathbf{n}$ 在 z 軸方向，于是

$$s_x\sim\cos\alpha\sin\alpha\left(\frac{1}{\varepsilon_\perp}-\frac{1}{\varepsilon_\parallel}\right),\quad s_z\sim\frac{\sin^2\alpha}{\varepsilon_\parallel}+\frac{\cos^2\alpha}{\varepsilon_\perp}.$$

由此求得折射角 ϑ' 为

$$\operatorname{tg}\vartheta'=\frac{s_x}{s_z}=\frac{(\varepsilon_\parallel-\varepsilon_\perp)\sin2\alpha}{\varepsilon_\parallel+\varepsilon_\perp+(\varepsilon_\parallel-\varepsilon_\perp)\cos2\alpha}.$$

§ 79. 双軸晶体的光学性质

在双軸晶体中，張量 ε_{ik} 的三个主値各不相同。屬于这种晶体

的有三斜系、单斜系和菱形系晶体。在三斜系晶体內，主介电軸的位置不与任何特定的晶体学方向有关。特别是，它們随頻率的变化而变化，如同 ε_{ik} 的全部分量随这頻率的变化而变化一样。在单斜系晶体內，在一个主介电軸在晶体学上是固定的(这主軸与二次的对称軸相合或与对称平面垂直)；而其他两个主軸的位置依賴于頻率。最后，在菱形系晶体內，三个主軸的位置全部是固定的，即它們必須和三个互相垂直的二次对称軸相合。

双軸晶体光学性质的研究，牵涉到普遍形式的菲涅耳方程(77.10)的研究。

以后为明确起見，我們假定

$$\varepsilon^{(x)}<\varepsilon^{(y)}<\varepsilon^{(z)}. \tag{79.1}$$

为了說明(77.10)式所定义的四次面的形状，首先，我們求出它与坐标平面相交的截面形状。在(77.10)式內，令 $n_z=0$，我們发現，它的左側可分解为两个因子：

$$(n^2-\varepsilon^{(z)})(\varepsilon^{(x)}n_x^2+\varepsilon^{(y)}n_y^2-\varepsilon^{(x)}\varepsilon^{(y)})=0.$$

由此看出，在 xy 平面內的截面的边界包括一圓：

$$n^2=\varepsilon^{(z)} \tag{79.2}$$

和一橢圓：

$$\frac{n_x^2}{\varepsilon^{(y)}}+\frac{n_y^2}{\varepsilon^{(x)}}=1, \tag{79.3}$$

而且根据(79.1)的条件，橢圓在圓內。类似地得到，与 yz 平面和 xz 平面相交的截面也包括一橢圓和一圓，但在 yz 平面內，橢圓在圓內，而在 xz 平面內，它們是相交的。由此可見，波矢量面为形状如图 39 所示的自交面(图中所示是在一个象限內的面)。

这面有四个奇点——四个自交点，在 xz 平面的每一象限內有一个这样的点。由 $f(n_x, n_y, n_z)=0$ 形式的方程所表示的面的奇点，如大家所知道的，可以由函数 f 的三个一阶导数全等于零求

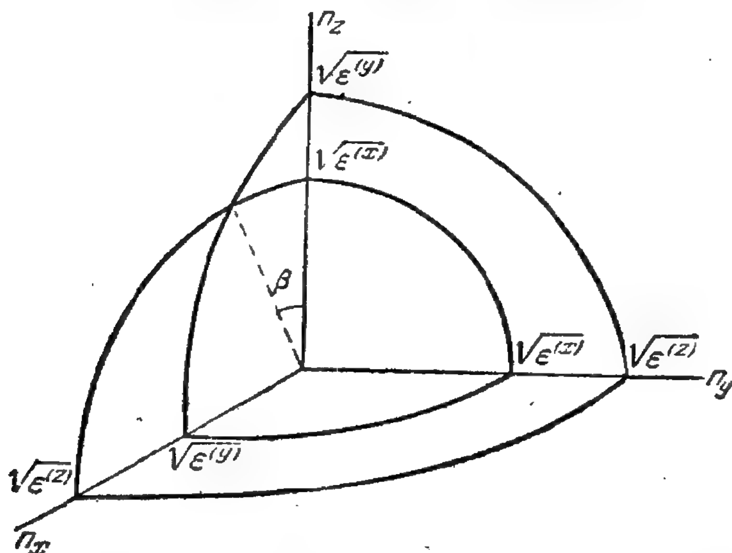


图 39

出。对(77.10)式左侧的式子求微分，我們得到下列方程：

$$
\begin{aligned}
&n_x[\varepsilon^{(x)}(\varepsilon^{(y)}+\varepsilon^{(z)})-\varepsilon^{(x)}n^2-(\varepsilon^{(x)}n_x^2+\varepsilon^{(y)}n_y^2+\varepsilon^{(z)}n_z^2)]=0,\\
&n_y[\varepsilon^{(y)}(\varepsilon^{(x)}+\varepsilon^{(z)})-\varepsilon^{(y)}n^2-(\varepsilon^{(x)}n_x^2+\varepsilon^{(y)}n_y^2+\varepsilon^{(z)}n_z^2)]=0,\\
&n_z[\varepsilon^{(z)}(\varepsilon^{(x)}+\varepsilon^{(y)})-\varepsilon^{(z)}n^2-(\varepsilon^{(x)}n_x^2+\varepsilon^{y}n_y^2+\varepsilon^{(z)}n_z^2)]=0.
\end{aligned}
\tag{79.4}
$$

当然(77.10)式本身也必須被滿足。因为我們已經知道，所求的 $\mathbf{n}$ 的方向在 xz 平面內，我們令 $n_y=0$，而从其余两个方程在經过簡单的計算后得到[①]

$$
n_x^2=\frac{\varepsilon^{(z)}(\varepsilon^{(y)}-\varepsilon^{(x)})}{\varepsilon^{(z)}-\varepsilon^{(x)}},\quad n_z^2=\frac{\varepsilon^{(x)}(\varepsilon^{(z)}-\varepsilon^{(y)})}{\varepsilon^{(z)}-\varepsilon^{(x)}},
\tag{79.5}
$$

这些矢量 $\mathbf{n}$ 的方向与 z 軸的傾角为 β，于是

$$
\frac{n_x}{n_z}=\pm\operatorname{tg}\beta=\pm\sqrt{\frac{\varepsilon^{(z)}(\varepsilon^{(y)}-\varepsilon^{(x)})}{\varepsilon^{(x)}(\varepsilon^{(z)}-\varepsilon^{(y)})}}.
\tag{79.6}
$$

这方程决定了 xz 平面內的两个軸(两个方向)，其中每一軸通过相反方向的两个奇点，而与 z 軸的傾角为 β。我們称这两个軸为晶体

① 容易直接证明，这样求得的解为(79.4)式的唯一的实数解。如果三个分量 n_x, n_y, n_z 都不为零，則(79.4)式的三个方程是相互矛盾的(实质上，它們只包含两个未知数：n^2 和 $\varepsilon^{(x)}n_x^2+\varepsilon^{(y)}n_y^2+\varepsilon^{(z)}n_z^2$)。若 $n_x=0$，或 $n_y=0$，則方程的解为虛数。

的光学軸（或称为仲法綫）；图 39 上的虚綫即表示其中一个光学軸。显然，光学軸方向是波矢量只有一个值的唯一方向[①]。

射綫面具有完全相似的性质。要推导出相应的公式，只要用 s 代替 n，$\frac{1}{\varepsilon}$代替 ε。特别是有两个“射綫光学軸”(或仲半徑)，也在 xz 平面內，并且与 z 軸的傾角为γ：

$$\operatorname{tg}\gamma=\sqrt{\frac{\varepsilon^{(y)}-\varepsilon^{(x)}}{\varepsilon^{(z)}-\varepsilon^{(y)}}}=\sqrt{\frac{\varepsilon^{(x)}}{\varepsilon^{(z)}}}\operatorname{tg}\beta. \tag{79.7}$$

因为 $\varepsilon^{(x)}<\varepsilon^{(z)}$，因而 $\gamma<\beta$。

相应的矢量n和s的方向，由普遍公式(77.12a)求出。只就沿坐标軸方向(即主介电軸方向)傳播的波来說，n 和 s 的方向才相同。如果 n 在某一个坐标平面內，則 s 也在同一平面內。但是，这个規則有一个十分重要的例外情况，即沿光学軸方向的波矢量。

将(79.5)式的n值代入(77.12a)式时，s的分量取不定形式0/0。这种不定形式的来源和意义，从下面的几何研究可以完全明了。在奇点附近，波矢量面的外腔和內腔为共頂点的錐面。在这頂点上(奇点)，波矢量面的法綫方向变成不确定的。而且由公式(77.12a)所确定的 s 的方向即为法綫的方向。实际上，沿光学軸方向(仲法綫方向)的一个波矢量对应着无限多的射綫矢量，它們的方向占据着一个确定的錐面，称为內圓錐形折射錐。

为了求出这个射綫錐，我們来研究奇点附近的法綫方向。但是更直观的是利用射綫面进行几何作图。

图 40 所示是一个象限內射綫面与 xz 平面相交的截面(实綫所示)。在这些坐标軸上所示的是波矢量面的截面(用任意改变了的比例尺)。直綫 OS 为仲半徑，而 ON 为仲法綫。相应于N点的波

---

① 在張量橢球面(77.19)上，仲法綫定义为垂直于橢球圓截面的方向。大家知道，三軸橢球有两个这样的截面。

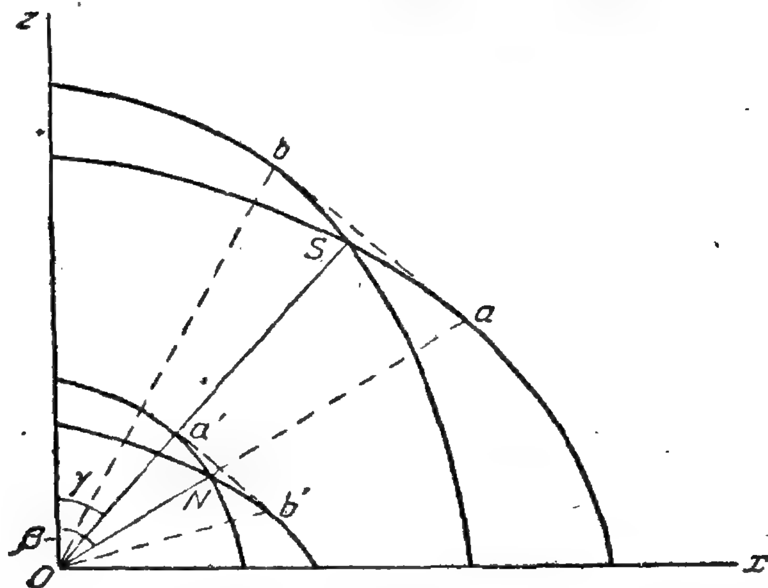


图　40

矢量用 $\mathbf{n}_N$ 表示。容易看出，波矢量面上的奇点 N 相应于射綫面上的奇切面——平面，这平面垂直于 ON 方向，并且与射綫面相切不是一点，而是一条曲綫（为一圓）。在图 40 上，这平面的截面用綫段 ab 表示。从 § 77 所指出的波矢量面与射綫面的几何对应，可以直接看出这一点：若从射綫面的某一点 $\mathbf{s}$ 作一切面，則从坐标原点至这切面的垂綫与 $\mathbf{n}$ 同向，而其长度等于 $\frac{1}{n}$，此处 $\mathbf{n}$ 为相应于 $\mathbf{s}$ 的波矢量。在現在的情况下，相应于同一值 $\mathbf{n}=\mathbf{n}_N$，必須有无限多的矢量 $\mathbf{s}$；因此，射綫面上代表这些矢量 $\mathbf{s}$ 的点，必須在同一个切面上，而且这切面与 $\mathbf{n}_N$ 垂直。由此可見，图 40 上的三角形 Oab 为內圓錐形折射錐与 xz 平面相交的截面的軌迹。

对上述几何图形进行定量計算，并沒有什么特別的困难，但是我們在这里不去叙述它，只是限于引入最后的公式。折射錐与射綫面相交的圓方程由下列两式給出：

$$(\varepsilon^{(z)}-\varepsilon^{(x)})s_y^2+\left(s_x\sqrt{\varepsilon^{(x)}(\varepsilon^{(z)}-\varepsilon^{(y)})}-s_z\sqrt{\varepsilon^{(z)}(\varepsilon^{(y)}-\varepsilon^{(x)})}\right)\times$$
$$\times\left(s_x\sqrt{\frac{\varepsilon^{(z)}-\varepsilon^{(y)}}{\varepsilon^{(x)}}}-s_z\sqrt{\frac{\varepsilon^{(y)}-\varepsilon^{(x)}}{\varepsilon^{(z)}}}\right)=0, \qquad (79.8)$$

$$s_x\sqrt{\varepsilon^{(z)}(\varepsilon^{(y)}-\varepsilon^{(x)})}+s_z\sqrt{\varepsilon^{(x)}(\varepsilon^{(z)}-\varepsilon^{(y)})}=\sqrt{\varepsilon^{(z)}-\varepsilon^{(x)}}. \quad (79.9)$$

其中第一个方程，若把 s_x, s_y, s_z 理解为三个独立变数，即为折射錐方程。第二个方程为与射綫面相切的切面方程。特别是当 $s_y=0$ 时，(79.8)式分解为两个方程：

$$\frac{s_x}{s_z}=\sqrt{\frac{\varepsilon^{(z)}(\varepsilon^{(y)}-\varepsilon^{(x)})}{\varepsilon^{(x)}(\varepsilon^{(z)}-\varepsilon^{(y)})}},\quad \frac{s_x}{s_z}=\sqrt{\frac{\varepsilon^{(x)}(\varepsilon^{(y)}-\varepsilon^{(x)})}{\varepsilon^{(z)}(\varepsilon^{(z)}-\varepsilon^{(y)})}},$$

这些方程定出与 xz 平面相交的截面內的边緣射綫的方向(分别为图 40 上的 Oa 和 Ob)。前者与仲法綫方向重合[比較(79.6)]，它同时与切綫 ab 垂直。

与給定的射綫矢量相应的波矢量，情況完全相似。相应于仲半徑方向的矢量 $\mathbf{s}$ 有无穷多的波矢量，它們的方向占据着一个外圓錐形折射錐(图 40 中的三角形 $Oa'b'$ 为这折射錐与 xz 平面相交的截面的軌迹)。和通常一样，在(79.8)与(79.9)式內进行代換：$\mathbf{s}\to\mathbf{n}$, $\varepsilon\to\dfrac{1}{\varepsilon}$，我們得到相应的公式为

$$\varepsilon^{(y)}(\varepsilon^{(z)}-\varepsilon^{(x)})n_y^2+\left(n_x\sqrt{\varepsilon^{(z)}-\varepsilon^{(y)}}-n_z\sqrt{\varepsilon^{(y)}-\varepsilon^{(x)}}\right)\times$$
$$\times\left(n_x\varepsilon^{(x)}\sqrt{\varepsilon^{(z)}-\varepsilon^{(y)}}-n_z\varepsilon^{(z)}\sqrt{\varepsilon^{(y)}-\varepsilon^{(x)}}\right)=0,$$
$$n_x\sqrt{\varepsilon^{(y)}-\varepsilon^{(x)}}+n_z\sqrt{\varepsilon^{(z)}-\varepsilon^{(y)}}=\sqrt{\varepsilon^{(y)}(\varepsilon^{(z)}-\varepsilon^{(x)})}.$$

在实际观察內圓錐形折射时[1]，所利用的平行平面薄片要垂直于仲法綫从晶体上截下(图 41)。在薄片面上盖上有小孔的光闌，它能从垂直入射到薄片上的平面波（即波矢量在确定方向的波）內分出狹的波束。透射到薄片上的光綫的波矢量方向与仲法綫方向重合，因此它的射綫分布于內折射錐面上。从薄片另一面射出来的光，其波矢量和入射光的

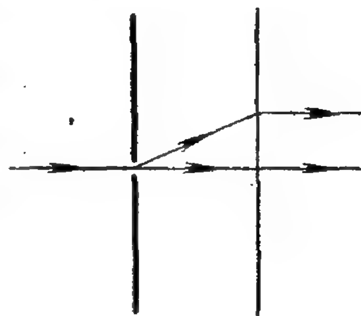


图 41

[1] 下面的描写是很粗略的。

相同，分布于圆柱面上。

要观察外圆錐折射，平行平面薄片必須垂直于仲半徑截下，而它的两面都用有小孔的光闌遮上，两光闌上的小孔正好互相对着。用会聚光束（即所含的射綫具有一切可能的 **n** 值）照射薄片时，光闌可以在薄片內选出 **s** 方向在仲半徑方向的光綫，因而这些光綫的 **n** 方向占据一外圓錐折射錐面。从第二个小孔出来的光，因此也分布于圓錐面上（但是由于在出口处发生折射，这錐面并不完全和外折射錐相合）。

当任意入射方向时，双軸晶体面上的折射定律是极其复杂的，我們在这里不去討論它們[①]。只是指出，和单軸晶体不同，双折射波是"非常波"，特别是它們的射綫不在入射平面內。

§80. 电場內的双折射

各向同性物体放在恒定电場內变成光学各向异性物体。这种各向异性的出現，可以描写为介电常数在恒定电場作用下改变的結果。虽然这种改变是相当微弱的，但在現在的情况下却十分重要，因为这引起物体的光学性质发生质的变化。

在这一节內，我們用 **E** 表示物体內的恒定电場强度[②]，并把介电張量 ε_{ik} 展开为 **E** 的冪級数。在各向同性物体內，在零級近似下，$\varepsilon_{ik}=\varepsilon^{(0)}\delta_{ik}$。$\varepsilon_{ik}$ 內場的一次項不存在，因为在各向同性物体內，不存在任何恒定矢量，利用来可以构成对 **E** 为綫性的二秩張量的。因此 ε_{ik} 展开式內以下的項为場的二次項。由矢量的分量可以构成二个二秩的对称張量：$E^2\delta_{ik}$ 和 E_iE_k。前者不改变張量 $\varepsilon^{(0)}\delta_{ik}$ 的对称性，因此在这張量上加上常数 $E^2\delta_{ik}$ 这样形式的一項，只是归結为在标量常数 $\varepsilon^{(0)}$ 內增加一小修正項；显然，这一修正項不会引

① 詳細的計算說明，可参閱 Handbuch d. Physik, Bd. XX, Berlin, 1928。

② 不要与通常很弱的波的交变电場相混淆。

起光学各向异性的出現,因此沒有什么意义。这样一来,我們得到下面形式的依賴于电場的介电張量:

$$\varepsilon_{ik}=\varepsilon^{(0)}\delta_{ik}+\alpha E_i E_k, \tag{80.1}$$

式中 α 为标量常数。

这張量的一个主軸与电場方向重合,相应的主値等于

$$\varepsilon_{\parallel}=\varepsilon^{(0)}+\alpha E^2. \tag{80.2}$$

其余的两个主値彼此相等:

$$\varepsilon_{\perp}=\varepsilon^{(0)}, \tag{80.3}$$

而相应的主軸在垂直于場的平面內的位置是任意的。由此可見,在电場內的各向同性物体,它的光学性质和单軸晶体完全一样(称为开尔效应)。

在电場內光学对称性的改变,也可以发生在晶体內(例如,光学上的单軸晶体可以变成双軸晶体,光学各向同性的立方晶体,可以变成光学各向异性的晶体)。但与各向同性物体內所出現的相应現象不同,晶体內的效应可以是場的一次的。相应于这种綫性效应的介电張量为

$$\varepsilon_{ik}=\varepsilon_{ik}^{(0)}+\alpha_{ikl}E_l,$$

式中的系数 α_{ikl} 构成一个三秩張量,它对下角标 i 和 k 是对称的 ($\alpha_{ikl}=\alpha_{kil}$)。这个張量的对称性和压电張量的对称性相同。因此,上述效应存在于容許压电現象的 20 类晶体內。

§81. 力学光学效应

除了前一节所研究的开尔效应外,外作用也在其他的情况中引起媒质的光学对称性改变。

这首先包括彈性形变对固体光学性质的影响。特别是,由于形变的結果,各向同性固体可以变成光学各向异性的。描写这种現象是在 $\varepsilon_{ik}(\omega)$ 引入与形变張量分量成正比的附加項。相应公式

的形式和描写静电介电常数的(16.1)和(16.6)式完全相同，所不同的只是其中的系数現在是頻率的函数。例如，各向同性物体形变时，

$$\varepsilon_{ik}=\varepsilon^{(0)}\delta_{ik}+a_1u_{ik}+a_2u_{ll}\delta_{ik}. \tag{81.1}$$

系数 $a_1(\omega)$ 和 $a_2(\omega)$ 称为弹性光学常数。

另一种情况是运动流体內所发生的光学各向异性現象。当然，整个流体的平移运动不会引起任何的光学各向异性；因此必須在流体內存在速度陡度。相应的介电張量的普遍表达式为

$$\varepsilon_{ik}=\varepsilon^{(0)}\delta_{ik}+\lambda_1\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right)+\lambda_2\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}-\frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right). \tag{81.2}$$

它代表 ε_{ik} 展开为速度的导数的冪級数的头几項。在不可压縮的流体內，$\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\equiv\operatorname{div}\mathbf{v}=0$，而且(81.2)式的最后二項縮减后变成零。这时 $\varepsilon^{(0)}$ 为静止流体的介电常数①。

(81.2)內的第二項和第三項，分别对下角标 i 和 k 为对称的和反对称的。当流体整个地匀速轉动时，我們有 $\mathbf{v}=[\mathbf{\Omega r}]$（$\mathbf{\Omega}$ 为轉动角速度），并且对称項变为零。不为零的反对称項这时代表由科里奥利力所引起的效应（与 $\mathbf{\Omega}$ 的一次冪成比例）②。但是在古典統計学中，科里奥利力一般不影响到旋轉体的性质③。这表明，(81.2)內的系数 λ_2 必須等于零，而不为零的 λ_2 值只能是与量子效应有关。

实际上，上述現象只在粒子形状为各向异性的悬浮体或胶状

---

① 为避免誤解起見，我們要着重指出，对(81.2)式不能应用§88內所研究的对称关系式（广义的动力系数对称原理）。推导这些关系式时假定了这些系数所描写的过程是系統內引起能量耗散的唯一根源。但是在現在的情况下，除了波的交变电磁場內的能量耗散外，还有另一种与这种場毫无关系的能量耗散源——即流体的非均匀流的內摩擦。

② 与張量 ε_{ik} 的反对称部分有关的光学性质，参閱§82。

③ 参閱“統計物理学”第三版，§34。

体內才有較大的数值。这时量子效应当然微小到可以忽略，于是$\lambda_2 \ll \lambda_1$，而且我們只須写出

$$\varepsilon_{ik} = \varepsilon^{(0)}\delta_{ik} + \lambda_1\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right). \tag{81.3}$$

这公式所描写的效应称为麦克斯韦效应，是由于速度陡度对悬浮在流体內的粒子的取向作用所引起的。

§ 82. 磁光学效应

当出現恒定磁場H时[①]，張量ε_{ik}不再是对称的。这时(88.13)式所表示的广义动力系数对称原理要求

$$\varepsilon_{ik}(\mathbf{H}) = \varepsilon_{ki}(-\mathbf{H}). \tag{82.1}$$

不存在吸收的条件只要求这張量为厄密型的，

$$\varepsilon_{ik} = \varepsilon_{ki}^*, \tag{82.2}$$

[如从(76.4)式看出的]但并不要求它为实数。从(82.2)式只能得出，ε_{ik}的实数部分和虛数部分必須分別是对称的和反对称的：

$$\varepsilon'_{ik} = \varepsilon'_{ki}, \quad \varepsilon''_{ik} = -\varepsilon''_{ki}. \tag{82.3}$$

考虑到(82.1)，我們有

$$\begin{aligned}\varepsilon'_{ik}(\mathbf{H}) &= \varepsilon'_{ki}(\mathbf{H}) = \varepsilon'_{ik}(-\mathbf{H}),\\ \varepsilon''_{ik}(\mathbf{H}) &= -\varepsilon''_{ki}(\mathbf{H}) = -\varepsilon''_{ik}(-\mathbf{H}),\end{aligned} \tag{82.4}$$

也即是，在非吸收媒质內，ε'_{ik}是H的偶函数，而ε''_{ik}为H的奇函数。

显然，逆張量ε^{-1}_{ik}也具有相同的对称性质。在下面的計算中，更为方便的即是利用这一張量。为了避免使用下角标太多，我們对它引进一个专用的符号[②]：

$$\varepsilon^{-1}_{ik} = \eta_{ik} = \eta'_{ik} + i\eta''_{ik}. \tag{82.5}$$

大家知道，任何二秩的反对称張量等效于某一軸矢量；对于張

---

① 不要与电磁波的周期性的弱場相混淆。

② 当然η'_{ik}和η''_{ik}本身不是ε'_{ik}和ε''_{ik}的逆張量。

量 η''_{ik}，我們用 G 来表示这个軸矢量。利用完全反对称的单位張量 e_{ikl}，可以将張量 η''_{ik} 的分量与矢量 G 的分量之間的关系写为

$$\eta''_{ik}=e_{ikl}G_l, \tag{82.6}$$

写成分量为

$$\eta''_{xy}=G_z,\quad \eta''_{zx}=G_y,\quad \eta''_{yz}=G_x.$$

电感应强度和电場强度之間的关系 $E_i=\eta_{ik}D_k$ 这时变成

$$E_i=(\eta'_{ik}+ie_{ikl}G_l)D_k=\eta'_{ik}D_k+i[\mathbf{DG}]_i. \tag{82.7}$$

其 E 和 D 的关系为这样形式的媒质，称为旋性媒质①。

我們現在对在任意旋性媒质內傳播的波的性质，作一普遍性的研究，这时我們假定媒质是各向异性的，并且对磁場的大小不加上任何假設②。

选擇波矢量的方向为 z 軸方向，于是(77.18)式变为

$$\left(\eta_{\alpha\beta}-\frac{1}{n^2}\delta_{\alpha\beta}\right)D_\beta=\left(\eta'_{\alpha\beta}+i\eta''_{\alpha\beta}-\frac{1}{n^2}\delta_{\alpha\beta}\right)D_\beta=0, \tag{82.8}$$

式中下角标 α,β 取 x, y 的值，我們选擇 x 和 y 軸的方向沿二維張量 $\eta_{\alpha\beta}$ 的主軸，相应的这个張量的主值，我們以 n_{01}^{-2} 和 n_{02}^{-2} 表示；于是方程变为

---

① 在直接关系式

$$D_i=\varepsilon'_{ik}E_k+i[\mathbf{Eg}] \tag{82.7a}$$

內的矢量 g，一般称为迴轉矢量。(82.7)和(82.7a)式內的系数之間的关系由下列公式給出：

$$\eta'_{ik}=\frac{1}{|\varepsilon|}\left\{\varepsilon'^{-1}_{ik}\ |\varepsilon'|-g_ig_k\right\},$$
$$G_i=-\frac{1}{|\varepsilon|}\varepsilon'_{ik}g_k, \tag{82.7b}$$

式中 $|\varepsilon|$ 和 $|\varepsilon'|$ 为張量 ε_{ik} 和 ε'_{ik} 的行列式。

② 和前面一样，我們假定媒质对电磁波的交变場为非磁性的(即假定 $\mu_{ik}(\omega)=\delta_{ik}$)。但是，这并不排斥媒质被恒定磁場所磁化(也即是靜磁导率可以不为1)。

上述的 $\varepsilon_{ik}(\omega)$ 的性质同样适用于張量 $\mu_{ik}(\omega)$，这时，在給定的頻率区域內，磁导率的色散成为主要的。

$$\left(\frac{1}{n_{01}^2}-\frac{1}{n^2}\right)D_x+iG_zD_y=0,$$

$$-iG_zD_x+\left(\frac{1}{n_{02}^2}-\frac{1}{n^2}\right)D_y=0 \qquad (82.9)$$

由这个方程組的行列式等于零的条件，得到 n^2 的二次方程为

$$\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n_{01}^2}\right)\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n_{02}^2}\right)=G_z^2, \qquad (82.10)$$

这方程的根对 $\mathbf{n}$ 的一个給定方向給出 n 的二个值：①

$$\frac{1}{n^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n_{01}^2}+\frac{1}{n_{02}^2}\right)\pm\sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n_{01}^2}-\frac{1}{n_{02}^2}\right)^2+G_z^2}. \qquad (82.11)$$

把这些值再代入(82.9)式內，我們得到相应的比值为

$$\frac{D_y}{D_x}=\frac{i}{G_z}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n_{01}^2}-\frac{1}{n_{02}^2}\right)\mp\sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n_{01}^2}-\frac{1}{n_{02}^2}\right)^2+G_z^2}\right]. \qquad (82.12)$$

比值 $\frac{D_y}{D_x}$ 为純虛值表明，波是橢圓偏振的，而且偏振橢圓的主軸为 x, y 軸。容易看出，这个比值的二个值的乘积等于 1。換句話說，若在一种波內

$$D_y=i\rho D_x$$

(式中的实数 ρ 为偏振橢圓的軸长之比)，則在第二种波內，

$$D_y=-\frac{i}{\rho}D_x.$$

这表明两种波的偏振橢圓具有相同的軸长比，但彼此相对旋轉 90°；其旋轉方向相反(图 42)②。

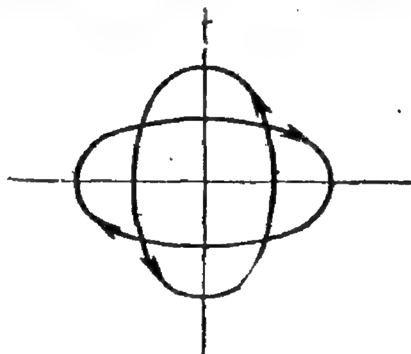


图 42

① 当場不存在时，$\mathbf{G}=0$ 和 $n=n_{01}$ 或 $n=n_{02}$。但是应注意到，当出現場时，(82.10)式內的 n_{01} 和 n_{02}，一般說来不是 $\mathbf{H}=0$ 时的 n 值，因为这时依賴于場的不只是矢量 $\mathbf{G}$，而且还有張量 η'_{ik} 的分量。

② 若把两种波內的矢量 $\mathbf{D}$ 表示为 $\mathbf{D}_1$ 和 $\mathbf{D}_2$，則所得到的关系式可以写为

$$\mathbf{D}_1\mathbf{D}_2^*=D_{1x}D_{2x}^*+D_{1y}D_{2y}^*=0.$$

这种关系式是把本征矢量化到厄密張量(在現在的情况下为張量 $\eta'_{\alpha\beta}$)的主軸上时所出現的普遍性质。

矢量 **G** 和張量 η'_{ik} 的分量为磁場强度的函数。如果(如通常存在的情况)磁場是比較弱的，則可以展开为場的冪級数。当場不存在时，矢量 **G** 等于零；因此，在弱場內，可以令

$$G_i = f_{ik} H_k, \tag{82.13}$$

式中 f_{ik} 为二秩張量，在普遍情况下是非对称的。这种形式的相依关系和 §76 的一般規則符合一致，按照这一規則，在透明媒质內，反对称張量 η''_{ik} (以及張量 ε''_{ik})的分量必須是 **H** 的奇函数。而对称張量 η'_{ik} 的分量則为磁場的偶函数。因此，η'_{ik} 內的头几个修正項(与場不存在时的值比較)为場的二次項[①]。

在波矢量为任意方向的普遍情况下，磁場对光在晶体內的傳播影响很小；只是引起振动的微小的橢圓率，其偏振橢圓的軸长比很小(为場的一次的)。

从磁光学效应的特征說来，只有光学軸方向(和其邻近方向)是一个例外，在这些方向上，当場不存在时，n 的两个値是相等的。于是 (82.10)的根和这些値只相差一个一級小量[②]，因而所发生的效应类似于各向同性物体內的效应，我們現在就来研究它們。

各向同性物体以及立方系晶体內的磁光学效应，由于它們具有奇异的特征和比較大的数值，因而有特别的意义。

我們略去二級小量以后，得到 $\eta'_{ik} = \varepsilon^{-1}\delta_{ik}$，其中 ε 为磁場不存在时各向同性媒质的介电常数。**D** 和 **E** 之間的关系由

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon}\mathbf{D} + i[\mathbf{DG}], \tag{82.14}$$

或由

---

① 在略去二級量以后，(82.76)式变成下列更簡单的式子：

$$\eta'_{ik} = \varepsilon'^{-1}_{ik}, \quad G_i = -\frac{1}{|\varepsilon'|}\varepsilon'_{ik} g_k. \tag{82.13a}$$

② 注意到(82.10)式的二个根在这种情况下不相等，这在几何意义上表明，波矢量平面的內腔和外腔是完全分开的。

$$\mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E}+i[\mathbf{E}\mathbf{g}] \tag{82.15}$$

給出，而且在相同的近似下，**g** 与 **G** 的关系为

$$\mathbf{G}=-\frac{1}{\varepsilon^2}\mathbf{g}. \tag{82.16}$$

g(或**G**)对外磁場的依賴关系，在各向同性物体內，归結为簡单的比例关系:

$$\mathbf{g}=f\mathbf{H}; \tag{82.17}$$

标量常数可以为正的，也可以为負的。

在(82.10)式內，我們現在有 $n_{01}=n_{02}\equiv n_0=\sqrt{\varepsilon}$；这是場不存在时的折射系数。由此得

$$\frac{1}{n^2}=\frac{1}{n_0^2}\mp G_z,$$

或者在同样的精确度下，

$$n_\mp^2=n_0^2\pm n_0^4G_z=n_0^2\mp g_z. \tag{82.18}$$

我們記住，z 軸选在 **n** 方向，在同样的精确度下，可以把这公式写成矢量形式:

$$\left(\mathbf{n}\pm\frac{1}{2n_0}\mathbf{g}\right)^2=n_0^2. \tag{82.19}$$

由此看出，波矢量面在現在的情况下包括两个半徑为 n_0 的球面，球心在 **G** 方向上，距离坐标原点为 $\pm\frac{g}{2n_0}$。

n 的两个值，其中每一个相应于不同的波偏振；即

$$D_x=\mp iD_y, \tag{82.20}$$

式中的正負号与(82.18)內的正負号相对应。当 D_x 与 D_y 之間的相差为 $\mp\frac{\pi}{2}$ 时，它們的絕对值相等，这表明波是圓偏振的，并且矢量 **D** 的旋轉方向，从波矢量方向看去，分别为反时針或順时針方向(或者按习慣說法，分别为右旋和左旋偏振波)。

由于左旋和右旋偏振波的折射率不同，結果在旋性物体表面

折射时产生两种圓偏振的折射波，这种現象称为双圓折射。

設綫偏振平面波垂直入射到物质的平行平面层上(厚度为l)。我們选擇入射方向为z軸，入射波的矢量$\mathbf{E}=\mathbf{D}$的方向为x軸。于是綫性振动可以表示为旋轉方向相反的两个圓振动之和，它們在波矢量不相同$\left(k_{\pm}=\left(\frac{\omega}{c}\right)n_{\pm}\right)$的物质层內傳播。假設波的振幅等于1，我們得到

$$D_x=\frac{1}{2}(e^{ik_+z}+e^{ik_-z}),\qquad D_y=\frac{i}{2}(-e^{ik_+z}+e^{ik_-z}),$$

或者引进 $k=\frac{1}{2}(k_++k_-)$ 和 $\kappa=\frac{1}{2}(k_+-k_-)$，

$$D_x=\frac{1}{2}e^{ikz}(e^{i\kappa z}+e^{-i\kappa z})=e^{ikz}\cos\kappa z.$$

$$D_y=\frac{i}{2}e^{ikz}(-e^{i\kappa z}+e^{-i\kappa z})=e^{ikz}\sin\kappa z.$$

当波从物质层內射出时，我們得到

$$\frac{D_y}{D_x}=\operatorname{tg}\kappa l=\operatorname{tg}\left(l\frac{\omega g}{2cn_0}\right).$$

这比值为实数表明，这波仍然为綫偏振波，但偏振方向相对于原来的方向已經改变(称为法拉第效应)。偏振平面轉动的角度与波所經过的路程成比例；在波矢量方向的单位长度上，这角度为

$$\frac{\omega g}{2cn_0}\cos\theta,$$

式中θ为$\mathbf{n}$与$\mathbf{g}$間的夹角。

应注意的是，当磁場方向給定时，偏振平面的旋轉方向(相对于$\mathbf{n}$的方向而言)当$\mathbf{n}$变号时改变为相反的方向——即右旋的变成左旋的，或者反过来。因此，若射綫通过同一路程两次(来回)，則偏振平面的合轉动比只通过一次时大二倍。

当 $\theta=\frac{\pi}{2}$(波矢量垂直于磁場)时，(82.18)式所描写的場的綫

性效应消失(这与上述的普遍規則符合一致,即矢量 **g** 的全部分量中,对光的傳播有影响的只是它在 **n** 方向上的投射)。因此,当 θ 接近 $\frac{\pi}{2}$ 时,还必須考慮到与場的平方成比例的項。特别是在張量 η'_{ik} 內,必須計及二次項。由于对場方向是軸对称的,因而对称張量 η'_{ik} 的两个主值相等(如单軸晶体的情况)。下面我們选擇 x 軸为場方向,并且将平行于和垂直于磁場方向的 η'_{ik} 的主值分别用 $\eta_\parallel$ 和 $\eta_\perp$ 表示,于是 $\eta_\parallel-\eta_\perp$ 之差与 H^2 成比例。

我們現在研究当 **n** 和 **g** 互相垂直时所发生的純粹的二次效应[称为柯頓-莫頓 (Cotton-Mouton) 效应]。在这种情况下,在(82.9)和(82.10)式內,我們有 $G_z=0$, 而 n_{01}^{-2} 和 n_{02}^{-2} 分别等于 $\eta_\parallel$ 和 $\eta_\perp$。这样一来,在其中一种波內,

$$\frac{1}{n^2}=\eta_\parallel, \qquad D_y=0;$$

这波是綫偏振的,矢量 **D** 的方向与 x 軸平行。在另一种波內,

$$\frac{1}{n^2}=\eta_\perp, \quad D_x=0,$$

也即是,其中的 **D** 在 y 軸方向。假設綫偏振光垂直入射到平行于磁場方向的物质的平行平面层上。于是物质內的透射光的两个分量(矢量 **D** 在 xz 和 yz 平面內)以不同的 n 值而傳播。結果通过物质层另一面出来的光为橢圓偏振光。

例 題

1. 試求光綫从眞空入射到磁場內各向同性物体表面折射时的光綫方向。

解. 射綫矢量 **s** 的方向,由波矢量面的法綫定出;将(82.19)式左側对矢量 **n** 的分量求微分,我們发現,矢量 **s** 与 $\mathbf{n}\pm\mathbf{g}/2n_0$ 成正比。这个式子的絕对值的平方等于 n_0^2;因此,射綫方向上的单位矢量由下式得出

$$\frac{\mathbf{s}}{s}=\frac{1}{n_0}\left(\mathbf{n}\pm\frac{1}{2n_0}\mathbf{g}\right). \tag{1}$$

我們用 θ 表示入射角。一般說来，折射光綫不在入射平面內，它們的方向由与表面法綫方向所成的 θ' 角和从入射平面算起的方位角 φ' 所决定。我們选擇入射面为 xz 平面，其 z 軸垂直于折射面。折射时波矢量的分量 n_x，n_y 仍然保持不变。而在入射光綫內，它們等于 $n_x=\sin\theta$，$n_y=0$。把这些值代入(1)式內，就得到单位矢量 $\frac{\mathbf{s}}{s}$ 的 x 分量和 y 分量，它們直接給出折射光的方向：

$$\sin\theta'\cos\varphi'=\frac{1}{n_0}\sin\theta\pm\frac{1}{2n_0^2}g_x,$$

$$\sin\theta'\sin\varphi'=\pm\frac{g_y}{2n_0^2}.$$

若入射角不太小，則方位角 φ' 很小，并且可以写为

$$\varphi'=\pm\frac{g_y}{2n_0\sin\theta'},\quad \sin\theta'=\frac{\sin\theta}{n_0}\pm\frac{g_x}{2n_0^2}.$$

当垂直入射时($\theta=0$)，我們选擇 xz 平面通过矢量 $\mathbf{G}$；于是 $\varphi'=0$，而 θ' 为

$$\theta'\cong\sin\theta'=\pm\frac{1}{2n_0^2}g_x.$$

虽然这个公式內并不包含 g_z，但是如果 $g_z=0$，它即不能应用，因为 $\mathbf{n}$ 和 $\mathbf{g}$ 互相垂直时，場的綫性近似不再适用。

2. 試求綫偏振波从眞空內垂直入射到磁場內各向同性物体表面时反射光的偏振。

解. 在垂直入射时，波矢量方向当波进入第二媒質时仍然保持不变。因此，在三种波內(入射波、反射波和折射波)，矢量 $\mathbf{H}$ 都平行于分界面(xy 平面)。至于电場矢量 $\mathbf{E}$，在入射波和反射波內，它也平行于 xy 平面，但在折射波內，虽然 $E_z\neq0$，但 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{H}$ 的 x 分量和 y 分量間的关系，則和在各向同性物体內相同($H_x=-nE_y, H_y=nE_x$)。若入射波的偏振和各向异性(折射)媒質內沿 $\mathbf{n}$ 方向傳播的两种波中的一种波的偏振相同，則只发生一种这种偏振的折射波。于是在这些条件下，問題在形式上变成和从各向同性物体上反射的問題相同，并且反射波和入射波內的場 $\mathbf{E}_1$ 和 $\mathbf{E}_0$，由下式联系起来。

$$\mathbf{E}_1=\frac{1-n}{1+n}\mathbf{E}_0, \tag{1}$$

式中 n 为相应于上述偏振的折射系数。

綫偏振可以看成是旋轉方向相反的两个圓偏振叠加的結果；如果在入射

波内，$\mathbf{E}_0$ 平行于 x 軸，則可以写为 $\mathbf{E}_0=\mathbf{E}_0^{+}+\mathbf{E}_0^{-}$，其中

$$E_{0x}^{+}=iE_{0y}^{+}=\frac{1}{2}E_0,$$

$$E_{0x}^{-}=-iE_{0y}^{-}=\frac{1}{2}E_0.$$

对于每种波 $\mathbf{E}_0^{\pm}$，利用(1)式[其中 $n_{\pm}$ 由(82.18)式得出]，我們得到

$$E_{1x}=\frac{E_0}{2}\left[\frac{1-n_+}{1+n_+}+\frac{1-n_-}{1+n_-}\right]\cong E_0\frac{1-n_0}{1+n_0},$$

$$E_{1y}=\frac{iE_0}{2}\left[\frac{1-n_-}{1+n_-}-\frac{1-n_+}{1+n_+}\right]\cong iE_0\frac{g\cos\theta}{n_0(1+n_0)^2},$$

θ 为入射方向与矢量 $\mathbf{g}$ 之間的夹角。由此看出，反射波是椭圓偏振的；椭圓的長軸在 x 軸上，而短軸与長軸之比等于

$$\frac{g\cos\theta}{n_0(n_0^2-1)}.$$

3. 試求高頻时迴轉矢量依賴于頻率的极限定律。

解. 計算和 § 59 內进行的相似，所不同的只是在电子的运动方程內，必須增加由恒定外磁場 $\mathbf{H}$ 所引起的洛侖茲力：

$$m\frac{d\mathbf{v}'}{dt}=e\mathbf{E}_0\,e^{-i\omega t}+\frac{e}{c}[\mathbf{v}'\mathbf{H}].$$

当 $\omega\gg\frac{eH}{mc}$ 时，这方程可用函次近似法解出。精确到 $\mathbf{H}$ 的一次項，我們得到

$$\mathbf{v}'=\frac{ie}{m\omega}\mathbf{E}-\frac{e^2}{m^2\omega^2c}[\mathbf{EH}],$$

然后求得感应强度为

$$\mathbf{D}=\varepsilon(\omega)\mathbf{E}+if(\omega)[\mathbf{EH}],$$

式中的 $\varepsilon(\omega)$ 和(59.1)相等，而

$$f(\omega)=-\frac{4\pi Ne^3}{cm^2\omega^3}.$$

§ 83. 自然旋光性

介电常数(和磁导率)的頻散现象，是物质的宏观性质依賴于电磁場随时間变化的表現。在前面的理論中，一般沒有計及对場的空間不均匀性的依賴关系。容許这种忽略的条件是原子綫度 a 小于波長 λ(参閱 § 58)。

不等式 $a \ll \lambda$ 一般說来是宏观理論可以应用的必要条件。但是完全忽略含有小比值 a/λ 的量，使某些本质上的新現象也被忽視了，这些新現象是由于計及了 a/λ 的展开式內零次項以后的項而出現的。我們現在就来研究这些現象。

展开为 a/λ 的冪級数，相应于宏观理論中感应强度 $\mathbf{D}$ 展开为电場 $\mathbf{E}$ 及其空間导数的冪級数。只限于取一次項时，我們必須在这展开式內計及与一阶导数的一次冪成正比的各項。对频率为 ω 的单色場，我們可以把展开式写为

$$D_i = \varepsilon_{ik}^{(0)} E_k + \gamma_{ikl} \frac{\partial E_k}{\partial x_l}, \tag{83.1}$$

式中量 $\varepsilon_{ik}^{(0)}$ 和 γ_{ikl} 为频率的函数。

在研究这个式子之前，必須作如下的說明。在我們感到兴趣的精确度范圍內，把微观电流密度的平均值 $\overline{\rho \mathbf{v}}$ 分成两部分——$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}$ 和 $c \operatorname{rot} \mathbf{M}$，已失去物理意义。所以，在上述的理論中，合理的是把麦克斯韦方程写为

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \tag{83.2}$$

除了平均微观磁場强度 $\overline{\mathbf{h}} = \mathbf{B}$ 外，无須再引另一个量 $\mathbf{H}$。代替此，由对微观电流求平均值而得到的項，假定都已包含在 $\mathbf{D}$ 的定义內。

(83.1)式內張量 γ_{ikl} 的对称性质，可以应用广义动力系数对称原理来說明，如在 §76 內对張量 ε_{ik} 所作的闡述一样。在那里我們曾看到，如果选擇物体每一点处矢量 $\mathbf{E}$ 的分量为量 x_a，則相应的量 f_a 是矢量 $\mathbf{D}$ 的分量。但是由于关系式(83.1)內出現空間导数，使直接应用对称原理增加了困难。在这里方便的是把对称原理表述成如下形式。設 x_a 和 x'_a 为量 x_a 的二組不同的值，而 f_a 和

f'_a 为与它們相对应的量 f_a 的两組值。由于在关系式

$$x_a = \sum_b \alpha_{ab} f_b, \qquad x'_b = \sum_b \alpha_{ab} f'_b$$

內的系数是对称的($\alpha_{ab}=\alpha_{ba}$)，我們可以写为

$$\sum_a x_a f'_a = \sum_a x'_a f_a. \tag{83.3}$$

在現在的情况下，这等式变为

$$\int E_i D'_i dV = \int E'_i D_i dV.$$

将(83.1)式代入，并考虑到我們已熟知的 $\varepsilon^{(0)}_{ik}$ 的对称性，我們得到

$$\int \gamma_{ikl} E_i \frac{\partial E'_k}{\partial x_l} dV = \int \gamma_{ikl} E'_i \frac{\partial E_k}{\partial x_l} dV,$$

或者在等式的一側进行分部积分：

$$\int \gamma_{ikl} E_i \frac{\partial E'_k}{\partial x_l} dV = -\int \gamma_{ikl} E_k \frac{\partial E'_i}{\partial x_l} dV = -\int \gamma_{kil} E_i \times \frac{\partial E'_k}{\partial x_l} dV.$$

由于函数 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{E}'$ 为任意的，由此得到对称性质为

$$\gamma_{ikl} = -\gamma_{kil}. \tag{83.4}$$

其次假定媒质內不存在吸收。我們来研究这在張量 γ_{ikl} 上加上了什么条件 周期場內的能量耗散由下列积分的平均值(对时間求平均)得出：

$$-\frac{1}{4\pi}\int \mathbf{E}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} dV.$$

在这里 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{D}$ 为实数。如果将各量用复数表示，則平均后的积分可以写为

$$-\frac{1}{16\pi}\int\left(\mathbf{E}\frac{\partial \mathbf{D}^*}{\partial t} + \mathbf{E}^*\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\right)dV =$$

$$= -\frac{i\omega}{16\pi}\int(\mathbf{E}\mathbf{D}^* - \mathbf{E}^*\mathbf{D})dV.$$

将(83.1)式代入上式，并考虑到在透明媒质內，我們已知 $\varepsilon^{(0)}_{ik}$ 为实数，于是我們得到

$$-\frac{i\omega}{16\pi}\int\left(\gamma^*_{ikl}E_i\frac{\partial E^*_k}{\partial x_l}-\gamma_{ikl}E^*_i\frac{\partial E_k}{\partial x_l}\right)dV=$$

$$=-\frac{i\omega}{16\pi}\int\left(\gamma^*_{ikl}E_i\frac{\partial E^*_k}{\partial x_l}+\gamma_{ikl}E_k\frac{\partial E^*_i}{\partial x_l}\right)dV=$$

$$=-\frac{i\omega}{16\pi}\int(\gamma^*_{ikl}+\gamma_{kil})E_i\frac{\partial E^*_k}{\partial x_l}dV.$$

当

$$\gamma^*_{ikl}=-\gamma_{kil}=\gamma_{ikl}$$

时，上式恒为零。这样一来，我們得到結論，不存在吸收的条件要求張量 γ_{ikl} 为实数。

对波矢量为 $\mathbf{k}=(\omega/c)\mathbf{n}$ 的平面波，我們有

$$\frac{\partial E_k}{\partial x_l}=i\frac{\omega}{c}E_kn_l,$$

于是

$$D_i=\varepsilon_{ik}E_k,$$

其中引用了符号

$$\varepsilon_{ik}=\varepsilon^{(0)}_{ik}+i\frac{\omega}{c}\gamma_{ikl}n_l \tag{83.5}$$

表示介电常数張量，它現在不但对頻率，而且对波矢量都表現出色散①。

代替二秩的反对称張量 $\gamma_{ikl}n_l$，我們将引入与它等效的"迴轉矢量"$\mathbf{g}$，这矢量由下式給出：

$$\frac{\omega}{c}\gamma_{ikl}n_l=e_{ikl}g_l, \tag{83.6}$$

也即是我們可以把 ε_{ik} 写为

$$\varepsilon_{ik}=\varepsilon^{(0)}_{ik}+ie_{ikl}g_l, \tag{83.7}$$

这式子在形式上和 § 82 內所用的书写形式相同。差别只在于，在

① 当 $\omega\to0$ 时，γ_{ikl} 与頻率的展开式无关系，并趋近于常数值。因而 ε_{ik} 的虛数部分与頻率的一次幂成比例地趋近于零。

§ 82 内，矢量 **g** 只依賴于媒质的性质(以及外加磁場)，而这里的迴轉矢量还依賴于場的波矢量。按照(83.6)式，这矢量的分量为 **n** 的分量的綫性函数，也即是

$$g_i = g_{ik} n_k. \tag{83.8}$$

将(83.8)代入(83.6)内，我們得到

$$\frac{\omega}{c}\gamma_{ikl} n_l = e_{ikm} g_{ml} n_l,$$

由于 **n** 为任意的，由此得

$$\frac{\omega}{c}\gamma_{ikl} = e_{ikm} g_{ml}, \tag{83.9}$$

由这个式子可以建立三秩的眞張量 γ_{ikl} 和二秩的贋張量 g_{ik} 之間的关系①。

物体的具体的晶体学对称性对張量 γ_{ikl}(或 g_{ik}) 的分量加上了一定的限制，特别是可以使它的全部分量都恒等于零。例如，張量 γ_{ikl} 不可能存在于具有对称中心的物体内。实际上，三个坐标变号时(发生反演)，三秩張量(以及二秩的贋張量)的全部分量也都变号，而物体的对称性則要求它們在这种变换中保持不变。

張量 g_{ik} 不为零的物体，称它們具有自然旋光性。由此可見，在任何情况下，旋光性的存在都要求物体不存在对称中心。

我們首先研究各向同性物体的自然旋光性。如果液体(或气体)是由沒有立体异构体的物质所組成的，則它們不但对任何轉动是对称的，而且对任何点处的反射(反演)也是对称的，因而不存在自然旋光性。只有由具有两种立体异构体的物质所組成的液体，而且其中两种异构体的含量不相等时，这种液体才是旋光性的；这样的液体不存在对称中心。

① 写成分量为

$$g_{xx} = \frac{\omega}{c}\gamma_{yzx}, \quad g_{xy} = \frac{\omega}{c}\gamma_{yzy}, \quad g_{yx} = \frac{\omega}{c}\gamma_{zxx} \text{ 等等。}$$

在各向同性物体內以及具有立方对称的晶体內，贗張量 g_{ik} 变成贗标量：

$$g_{ik}=f\delta_{ik},\tag{83.10}$$

張量 γ_{ikl} 用 f 表示为 $\gamma_{ikl}=(c/\omega)fe_{ikl}$。贗标量是坐标反演时变号的量。两种立体异构物质，由于反演变換，在形式上可以相互轉換；因此，它們的 f 值有相反的正負号。

由此可見，在旋光性的各向同性物体內，迴轉矢量 $\mathbf{g}=f\mathbf{n}$，而波的感应强度和电場强度之間的关系为

$$\mathbf{D}=\varepsilon^{(0)}\mathbf{E}+if[\mathbf{En}].\tag{83.11}$$

因为 $\mathbf{Dn}=0$，由此得出，$\mathbf{En}=0$。換句話說，在这种波內，对于 $\mathbf{n}$ 的方向来說，不但感应强度 $\mathbf{D}$ 是横向的（如在任何媒质內一样），而且 $\mathbf{E}$ 也是横向的。

考慮到物质的自然旋光性时，折射率 n 的变化为一小量。因此在求 n 时，可以在(83.11)的小項 $[\mathbf{Eg}]$ 內令 $n=n_0=\sqrt{\varepsilon^{(0)}}$。于是計算 $n-n_0$ 之差的問題，在形式上和前一节內所研究的計算由磁場引起的 n 的改变的問題相同，所不同的只是矢量 $\mathbf{g}$ 有不同的意义以及它永远平行于 $\mathbf{n}$ 的方向（§82 內的 z 軸）。所以，按照与(82.18)式的类似，我們立即可以写为

$$n_{\pm}^2=n_0^2\pm g=n_0^2\pm fn_0,\tag{83.12}$$

这两个值相应于[与(82.20)比較]矢量 $\mathbf{E}$（或 $\mathbf{D}$）的二个分量的比值

$$E_x=\pm iE_y,\tag{83.13}$$

也即是波是左旋和右旋圓偏振的。我們还注意到，矢量 $\mathbf{n}$ 的值与它的方向无关；所以，$\mathbf{n}$ 的方向和射綫矢量 $\mathbf{s}$ 的方向相同。

这样一来，我們看到，自然旋光性的各向同性物体的光学性质，和磁場內非旋光性的物体所得到的性质相似：它具有双圓折射，而且綫偏振波在其中傳播时，偏振平面发生旋轉。在射綫路程单位长度上的旋轉角等于 $\omega f/2c$。

对物质的两种立体异构体，常数 g 的正負号，因而旋轉的方向是相反的，为此我們称为右旋和左旋立体异构体。

与磁場內偏振面的旋轉不同，在自然旋光性物质內，旋轉的数值和正負号都不依賴于光綫的傳播方向。因此，如果在自然旋光性媒质內，綫偏振光通过同一路程两次(来回)，則它仍在原来的平面內偏振化(即偏振面不变)。

我們現在来研究自然旋光性的晶体。在这里我們不准备系統地分析各种可能的对称情况(参閱本节例題)，而只是指出，存在对称中心时不可能有自然旋光性，但存在对称平面或鏡像轉动軸时，可能存在自然旋光性。应着重指出，晶体內存在自然旋光性的条件，并不与容許晶体存在两种鏡像异构体(称为对映体)的条件相同，后者是更为严格的条件，不但要求不存在对称中心，而且也要求不存在对称平面。由此可見，晶体可能是旋光性的，并且可能和它的鏡像相同。

当自然旋光性晶体內(单軸或双軸的)有波矢量为任意方向的光綫傳播时，我們实际上所遇到的是通常的綫偏振波的双折射現象，因而計及旋光性基本上归結为以軸长比小(一級小量)的椭圓偏振代替严格的綫偏振。

只有光軸方向是一个例外，在光軸方向上，若不計入旋光性，菲湼耳方程的两个根相等。在这些方向上，晶体的自然旋光性現象和各向同性物体的旋光性相似：发生一級的双圓折射現象以及綫偏振波的偏振平面相应地轉动。当波矢量偏离光学軸方向时，这些現象很快地消失。

要定量地計算晶体內的自然旋光性現象，最方便的不是利用 $\mathbf{E}$ 表示 $\mathbf{D}$ 的式子，而是利用 $\mathbf{D}$ 表示 $\mathbf{E}$ 的倒易式(如在 §82 內进行的)。精确到一級量，这些公式为

$$E_i = \varepsilon_{ik}^{(0)-1} D_k + [\mathbf{DG}]_i, \tag{83.14}$$

式中矢量 G 与前面引进的矢量 g 的关系为

$$G_i = -\frac{1}{|\varepsilon^{(0)}|}\varepsilon^{(0)}_{ik}g_k$$

[参閱(82.13a)]。由于这个式子和(82.7)式形式相同,因而(82.9)、(82.10)式也仍然有效。在这些方程內，G_z 是矢量 G 在 n 方向上的投影。若把 G 写为

$$G_i = G_{ik}n_k \tag{83.15}$$

[类似于(83.8)式],則这投影与

$$\mathbf{nG} = G_{ik}n_in_k \tag{83.16}$$

成正比。

这个二次式决定自然旋光性晶体的光学性质。張量 G_{ik} 本身不一定是对称的，但是如果把它分开为对称的和反对称的部分，則写成(83.16)的形式时反对称部分消失。因此，我們得到結論，在研究自然旋光性晶体的光学性质时，我們可以认为張量 G_{ik} 是对称的。

例　題

試求出晶体的对称性对張量 G_{ik} 的分量所加上的限制。

解．在任何轉动下，贋張量 G_{ik} 的行为和真張量相同；特别是，二次以上的对称軸的存在，如同对二秩的真对称張量一样，引起与軸垂直的平面內出現完全各向同性。贋張量 G_{ik} 在反射时的行为决定于它与三秩的真張量等値这一事実；即是在使二秩真張量的一个分量变号的任何反射下，G_{ik} 的相应分量保持不变，反之亦然。例如，在 yz 平面內反射时，分量 G_{xx}，G_{zz}，G_{yz} 变号，而 G_{xy}，G_{xz} 保持不变。

下面对容許自然旋光性的全部晶类，列出張量 G_{ik} 的不为零的各分量。我們选擇 z 軸为三次、四次或六次的对称軸，或者为唯一的二次对称軸(在晶类 C_2，C_{2v} 內)，而在晶类 C_s 內，选擇它垂直于对称平面；当存在三个互相垂直的对称軸时，坐标軸和它們相合。

晶类 C_1：G_{ik} 的全部分量

晶类 C_2：$G_{xx}, G_{yy}, G_{zz}, G_{xy}$；适当地选擇 x 軸和 y 軸，可以使 G_{xy} 变为零。

晶类 C_s：G_{xz}, G_{yz}；适当选擇 x, y 軸，可以使其中一个变为零。

晶类 C_{2v}：G_{xy}(xz 平面和 yz 平面与对称平面重合)。

晶类 D_2：G_{xx}, G_{yy}, G_{zz}。

晶类 C_3、C_4、C_6、D_3、D_4、D_6：$G_{xx}=G_{yy}, G_{zz}$。

晶类 S_4：$G_{xx}=-G_{yy}, G_{xy}$；适当选擇 x, y 軸，可使其中一个变为零。

晶类 D_{2d}：G_{xy}(x 軸和 y 軸在竪直的对称平面內)。

晶类 T、O：$G_{xx}=G_{yy}=G_{zz}$。

应該指出的是，在晶类 S_4 和 D_{2d} 的单軸晶体內，如果矢量 $\mathbf{n}$ 在 z 軸方向上，因为 $G_{zz}=0$，則(83.16)的标量变为零。这表明在这些晶体內，在光学軸方向上不存在自然旋光性效应。

在晶类 C_{2v} 的双軸晶体內，光学軸在一个对称平面內。但是对于在 xz 平面或 yz 平面內的矢量 $\mathbf{n}$，(83.16)內的标量在現在的情况下也变为零，于是在光学軸方向上也不存旋光性效应。单斜晶类 C_s 是容許偏振面在光学軸方向有旋轉現象但不容許有对映形态的唯一晶类。

第十二章　快速粒子通过物质

§84.　快速粒子在物质內的电离損失·非相对論情况

快速带电粒子通过物质时使物质的原子电离，同时損失本身的能量①。气体內的电离損失可以认为是由于快速粒子与各个原子碰撞的結果。在凝聚媒质內(固体和液体媒质)，可以同时有許多个原子与飞过的粒子发生相互作用。这种情况对粒子能量損失的影响，从宏观的观点看来，可以看作是粒子的电荷使媒质发生介电极化的結果。首先我們从粒子的非相对論速度的情况来研究这种效应。如从以后所得到的結果看出的，在这种情况下，媒质的极化对粒子能量損失的影响很小。但是由于这种方法可以推广到其他情况，因此这些推导在方法論上还是有意义的。

首先我們来說明对这种現象容許从宏观观点来研究的条件。速度为 v 的运动粒子在离开其路程 r 处所产生的場的譜分解主要包含与 $\frac{v}{r}$ 同数量級的頻率項("碰撞时間"的倒数)。頻率为 $\omega \gtrsim \omega_0$ 的場分量可以使原子电离，其中 ω_0 为相应于原子內大多数电子运动的某一平均頻率。因此，如果 $\frac{v}{\omega_0}$ 大于原子間距，則粒子将同时与許多原子发生相互作用；在凝聚物体內，原子間距和原子本身的綫度 a 为同一数量級。这样一来，我們得到条件 $v \gg a\omega_0$，也即是致电离粒子的速度必須大于原子內电子的速度（或者至少其中大多

① 按照习慣，我們称为"电离損失"，但其中当然也包括激发、原于分立能級所引起的能量損失。

数电子的速度)[1]。

我們現在来求出在物质媒质內运动的带电粒子所产生的場。在非相对論的情况下，只須考慮由一个标量势 φ 所定义的电場。这标量势滿足泊松方程：

$$\hat{\varepsilon}\Delta\varphi=-4\pi e\delta(\mathbf{r}-\mathbf{v}t), \tag{84.1}$$

其中把"介电常数"作为算符，而等式右側的式子 $e\delta(\mathbf{r}-\mathbf{v}t)$ 为以恒定速度 $\mathbf{v}$ 运动的点电荷所产生的密度[2]。

把 φ 展开为坐标的傅立叶积分：

$$\varphi=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_{\mathbf{k}}e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}d^3k. \tag{84.2}$$

将拉普拉斯方程作用到这等式的两側，我們得到

$$\Delta\varphi=-\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_{\mathbf{k}}k^2e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}d^3k,$$

由此看出，$\Delta\varphi$ 的傅立叶分量等于

$$(\Delta\varphi)_{\mathbf{k}}=-k^2\varphi_{\mathbf{k}}.$$

另一方面，取(84.1)式两側的傅立叶分量，我們有

$$\hat{\varepsilon}(\Delta\varphi)_{\mathbf{k}}=-\frac{1}{(2\pi)^3}\int 4\pi e\delta(\mathbf{r}-\mathbf{v}t)e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}}dV=-\frac{e}{2\pi^2}e^{-it\mathbf{v}\mathbf{k}}.$$

比較两个式子，我們得到

$$\hat{\varepsilon}\varphi_{\mathbf{k}}=\frac{e}{2\pi^2k^2}e^{-it\mathbf{v}\mathbf{k}}.$$

由此看出，$\varphi_{\mathbf{k}}$ 与时間的关系由因子 $e^{-it\mathbf{v}\mathbf{k}}$ 表示。但是算符 $\hat{\varepsilon}$ 作用在

---

[1] 对于粒子的能量 E，由此得到条件：

$$E\gg\frac{M}{m}I.$$

式中 M 为粒子的质量，m 为电子的质量，I 为原子內大多数电子的某一平均电离能量。

[2] 假定粒子作直綫运动，因而我們略去了对上述問題常常存在的散射現象。若粒子的电荷为 ze，則在本节和下节內，有关能量损失的公式都必須乘上 z^2。

函数 $e^{-i\omega t}$ 上为用 $\varepsilon(\omega)$ 与它相乘。因此，最后得到 $\varphi_{\mathbf{k}}$ 的式子为

$$\varphi_{\mathbf{k}}=\frac{e}{2\pi^2k^2\varepsilon(\mathbf{kv})}e^{-it\mathbf{vk}}.$$

电場强度的傅立叶分量与場势的傅立叶分量的关系为

$$\mathbf{E}_{\mathbf{k}}e^{i\mathbf{kr}}=-\operatorname{grad}\varphi_{\mathbf{k}}e^{i\mathbf{kr}}=-i\mathbf{k}\varphi_{\mathbf{k}}e^{i\mathbf{kr}},$$

或者 $\mathbf{E}_{\mathbf{k}}=-i\mathbf{k}\varphi_{\mathbf{k}}$。由此可見，

$$\mathbf{E}_{\mathbf{k}}=-\frac{ie\mathbf{k}}{2\pi^2k^2\varepsilon(\mathbf{kv})}e^{-it\mathbf{kv}}. \tag{84.3}$$

反过来对它的傅立叶分量求和，我們得到总电場强度为

$$\mathbf{E}=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathbf{E}_{\mathbf{k}}e^{i\mathbf{kr}}d^3k. \tag{84.4}$$

我們所感兴趣的运动粒子所受到的能量損失，不外是粒子所产生的場反过来作用在粒子上的韧致力 $e\mathbf{E}$ 所作的功。取粒子所在的点即 $\mathbf{r}=\mathbf{v}t$ 点处的場值后，我們在(84.4)式的被积式內得到一个因子 $e^{it\mathbf{vk}}$，它与 $\mathbf{E}_{\mathbf{k}}$ 的表达式 (84.3) 內的因子 $e^{-i\mathbf{kv}t}$ 相互抵消。因此，韧致力 $\mathbf{F}$ 由下列积分給出:

$$\mathbf{F}=-\frac{ie^2}{2\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathbf{k}}{k^2\varepsilon(\mathbf{kv})}d^3k.$$

显然，力 $\mathbf{F}$ 的方向与速度 $\mathbf{v}$ 的方向反平行；选擇后者的方向为 x 軸。引进符号 $k_xv=\omega$, $q=\sqrt{k_y^2+k_z^2}$，并用 $2\pi q dq$ 代替 dk_ydk_z，我們可以将 $\mathbf{F}$ 的絕对值改写为

$$F=\frac{ie^2}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{0}^{q_0}\frac{q\omega\,dq\,d\omega}{\varepsilon(\omega)(q^2v^2+\omega^2)}, \tag{84.5}$$

q 的积分上限的选擇参閱下面。

关于(84.5)式內对 $d\omega$ 的积分，我們还必須作下列的說明。当 $\omega\to\infty$ 时，函数 $\varepsilon(\omega)\to1$，并且积分是对数发散的。这种情况的产

生，是由于实际上我們必須从場 **E** 內減去粒子在眞空內（即 $\varepsilon=1$）运动时所出現的場；显然，这場并不影响粒子在物质內所受到的能量損失。这种相减只是使 (84.5) 的被积式內以 $\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)-1$ 代替 $\frac{1}{\varepsilon}$，然后积分就变成是收斂的。但是如果把从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 的积分理解为从 $-R$ 到 $+R$ 然后令 $R\to\infty$ 的积分，則不进行上述的代換，也可以得到相同的結果。由于函数 $\varepsilon'(\omega)$ 是偶的，因而被积式內的实数部分为頻率的奇函数，并且用这种积分方法积分时变为零；被积式內虛数部分的积分是收斂的。

下面有时更为方便的是利用符号:

$$\frac{1}{\varepsilon(\omega)}=\eta(\omega)=\eta'+i\eta'', \tag{84.6}$$

式中 $\eta'(\omega)$，$\eta''(\omega)$ 分別为偶函数和奇函数，而且 $\eta''=-\frac{\varepsilon''}{|\varepsilon|^2}<0$。(84.5)式可以写成明显的实数形式:

$$F=\frac{2e^2}{\pi}\int_0^{\infty}\int_0^{q_0}\frac{q\omega'|\eta''(\omega)|}{(q^2v^2+\omega^2)}dqd\omega, \tag{84.7}$$

粒子在其路程单位长度上所受到的能量損失，为韌致力在这路程上所作的功，也即是恰好等于 F。

按照量子力学的普遍規則，波矢量为 **k** 的場的傅立叶分量傳递給被电离电子（δ 电子）的 动量为 $\hbar\mathbf{k}$。当 $q\left(q\gg\frac{\omega_0}{v}\right)$ 的值充分大时，我們有 $k^2=q^2+\frac{\omega^2}{v^2}\approx q^2$，于是所傳递的动量近似地等于 $\hbar\mathbf{q}$。$\mathbf{q}$ 的給定值相应于“瞄准距离”为 $\sim\frac{1}{q}$ 的碰撞。因此，上述宏观方法可以应用的条件需要 $\frac{1}{q}\gg a$。为此，我們取滿足条件 $\frac{\omega_0}{v}\ll q_0\ll\frac{1}{a}$ 的 q_0 值为积分的上限。量 $F(q_0)$ 为快速粒子所受到的能量損失，其傳递給原子內电子的动量不超过 $\hbar q_0$。

在(84.7)式对 dq 进行积分后，我們得到

$$F(q_0)=\frac{2e^2}{\pi v^2}\int_0^\infty \omega\,|\eta''(\omega)|\ln\frac{q_0 v}{\omega}d\omega. \tag{84.8}$$

这个公式在普遍形式下已不能再进行变换，但由引入相应的符号，可以把它写成更方便的形式。

首先，我們計算积分：

$$\int_0^\infty \omega\eta''(\omega)d\omega=-\frac{i}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\omega}{\varepsilon}d\omega.$$

为此注意到，如果在复平面 ω 內对由实軸和无限大上半圓 σ 所形成的迴路进行积分，則积分变为零，因为被积式在上半平面內无极点。当 ω 的值很大时，函数 $\varepsilon(\omega)$ 由(59.1)式求出：

$$\varepsilon(\omega)=1-\frac{4\pi e^2 N}{m\omega^2}. \tag{84.9}$$

利用上式对无限大半圓 σ 进行积分，結果得到①

$$-\int_0^\infty \omega\eta''(\omega)d\omega=-i\frac{2\pi N e^2}{m}\int_\sigma\frac{d\omega}{\omega}=\frac{2\pi^2 N e^2}{m}. \tag{84.10}$$

我們引进原子內电子运动的某一平均頻率，定义它为

$$\ln\overline{\omega}=\frac{\int_0^\infty \omega\eta''(\omega)\ln\omega\cdot d\omega}{\int_0^\infty \omega\eta''(\omega)d\omega}=\frac{m}{2\pi^2 N e^2}\int_0^\infty \omega\,|\eta''(\omega)|\ln\omega\, d\omega, \tag{84.11}$$

利用这一符号，(84.8)式可以写为

$$F(q_0)=\frac{4\pi N e^4}{m v^2}\ln\frac{q_0 v}{\overline{\omega}}. \tag{84.12}$$

---

① 这个值和积分 $\int_0^\infty \omega\varepsilon''(\omega)d\omega$ 的值相等（参閱(62.14)），这正是应当的，因为当 $|\omega|\to\infty$ 时，有 $|\varepsilon|\to1$，因而 $\eta''\to\varepsilon''$。

在这里我們必須作如下的說明。从(84.7)或(84.11)式的形式看来，可能会认为:对(84.12)的电离損失作出主要貢献的只是存在显著吸收的頻率区域。但是幷不是一定如此，在上述公式內，也可能包含来自 ε'' 很小的区域的显著貢献。这原因在于在这些頻率区域內，函数 $\varepsilon(\omega)\approx\varepsilon'(\omega)$ 可能通过零点。但是从(84.5)式看出，$\varepsilon(\omega)$的零点为被积式的极点。当然，$\varepsilon''(\omega)$实际上幷不严格地等于零，因而函数 $\varepsilon(\omega)$的零点幷不是恰好在实軸上，而是在它下面一些。这表明，在利用通过零点的 $\varepsilon(\omega)$的实数表达式时，必須从上面繞过被积式的极点，因而这对积分作出相应的貢献。例如，如果函数 $\varepsilon(\omega)$由(64.5)式給出，則由于繞过极点$\pm\omega_1$(这时$\varepsilon(\omega_1)=0$)对(84.12)的軔致所作的貢献，如从对(84.7)式的直接計算所容易证明的，等于

$$\frac{4\pi Ne^4}{mv^2a^2}\ln\frac{q_1v}{\omega_1}.$$

为了求出能量損失 $F(q_1)$(其所傳递的动量不超过某一值$q_1\gg q_0$)，必須把(84.12)式与由量子力学碰撞理論所得出的相应于与单个原子碰撞的能量損失的公式"結合"起来。我們之所以可以这样作，是由于这两个公式的应用区域是重叠的。从碰撞理論可知，动量傳递在 hdq 范圍內的能量損失为

$$dF=\frac{4\pi Ne^4}{mv^2}\frac{dq}{q},\tag{84.13}$$

而且这个公式对符合动量和能量守恒定律的 $q\gg\omega_0/v$ 的任何值，都可以应用(在非相对論情况下)只要所傳递的能量小于快速粒子原来的能量①。全部 q 値在 q_0 和 q_1 之間的能量損失相应地为

① 参閱"量子力学"，§ 121；此处的 F 与那里所引进的"有效軔致"相差一个因子 N。

(84.13)式相应于与自由电子的碰撞。但是它的应用区域($q\gg\omega_0/v$)可以推广到这样的 q 值，这时原子內的电子实际上还不能认为是自由的。后者要求 $q\gg\omega_0/v_0$ (v_0为原子內大多数电子的速度的数量級)，这时 δ 电子的能量 $h^2q^2/2m$ 很大于原子的能量。

$$\frac{4\pi N e^4}{mv^2}\ln\frac{q_1}{q_0}.$$

把这个量加到(84.12)式内时，我們必須用 q_1 代換 q_0，于是

$$F(q_1)=\frac{4\pi N e^4}{mv^2}\ln\frac{q_1 v}{\overline{\omega}}. \tag{84.14}$$

如果傳遞給原子电子的动量hq_1大于原子的动量，則原子电子所得到的能量等于 $E_1=\frac{h^2q^2}{2m}$。引进这个量后，我們写为

$$F(E_1)=\frac{2\pi N e^4}{mv^2}\ln\frac{2mv^2E_1}{h^2\overline{\omega}^2}. \tag{84.15}$$

这个公式給出快速粒子(例如电子)由于电离作用而引起的能量损失，这时所傳遞的能量不超过 E_1。这公式和从微观观点研究碰撞而不計及原子間的相互作用① 所得到的普通公式不同的地方，只是"电离能"的定义不同，現在的"电离能"为 $h\overline{\omega}$。但是原子的平均电离能量(对电子求平均)，一般說来，差不多不依賴于它与其他原子的相互作用，因为其中起主要作用的是內层电子，它們差不多不受这种相互作用的影响。但是在現在情况下，这个量只出現在对数符号內，因而它的精确定义对能量损失的数值的影响更小。

当快速的重粒子受到轫致时，傳遞給原子电子的极大能量等于 $2mv^2$，但仍小于重粒子本来的能量②。把这个值代入(84.15)式內代替其中的 E_1，于是我們得到重粒子的总电离损失为

$$F=\frac{4\pi N e^4}{mv^2}\ln\frac{2mv^2}{h\overline{\omega}}. \tag{84.16}$$

---

① 参閱"量子力学"，§ 121，公式(121.13)。

② 当重粒子与电子碰撞时，所傳遞的极大动量 hq_{max} 小于粒子的动量 Mv。因此，重粒子能量的变化等于 $\mathbf{v}\cdot h\mathbf{q}$；令这个能量等于电子的能量，我們得到

$$\frac{h^2\mathbf{q}^2}{2m}=h\mathbf{v}\mathbf{q}\leqslant hv\mathrm{q},$$

由此得到 $hq_{max}=2mv,\ E_{1max}=2mv^2$。

这公式和通常应用的公式[①]不同处，只是电离能量的定义为 $\hbar\bar{\omega}$。

§85. 快速粒子在物质內的电离損失·相对論情况

当速度接近于光速时，媒质的极化对快速粒子的韧致作用的影响，如我們将看到的，不但在凝聚媒质内，甚至在气体内，也可能变成是很重要的[②]。

为了推导出相应的公式，我們应用类似于前一节所用的方法。但是这时我們必須以完全的麦克斯韦方程組为出发点。当存在外电荷（空間密度为 $\rho_{外}$）和外电流（密度为 $\mathbf{J}_{外}$）时，这些方程变为[③]

$$\operatorname{div}\mathbf{H}=0,\qquad \operatorname{rot}\mathbf{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t},\tag{85.1}$$

$$\operatorname{div}\hat{\varepsilon}\mathbf{E}=4\pi\rho_{外},\qquad \operatorname{rot}\mathbf{H}=\frac{1}{c}\frac{\partial\hat{\varepsilon}\mathbf{E}}{\partial t}+\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}_{外}.\tag{85.2}$$

在現在的情况下，外电荷和外电流的分布由下列式子給出：

$$\rho_{外}=e\delta(\mathbf{r}-\mathbf{v}t),\quad \mathbf{j}_{外}=e\mathbf{v}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{v}t).\tag{85.3}$$

按照通常的定义，引进标量势和矢量势：

$$\mathbf{H}=\operatorname{rot}\mathbf{A},\quad \mathbf{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}-\operatorname{grad}\varphi,\tag{85.4}$$

因而方程(85.1)恒被滿足。对矢量势 $\mathbf{A}$ 和标量势 φ，我們加上附加条件：

$$\operatorname{div}\mathbf{A}+\frac{1}{c}\frac{\partial\hat{\varepsilon}\varphi}{\partial t}=0,\tag{85.5}$$

这条件是"輻射理論"中通常的"洛倫茲条件"的推广。于是将(85.4)式代入(85.2)式，得到势的方程为

---

① 参閱"量子力学"，§122，(122.10)式。

② 这效应由 E. 費米指出(1940)，并曾对被視为諧振子的原子所組成的特殊气体模型进行了計算。下面叙述的普遍推导是由 Л. 朗道提出的。

③ 我們处处假定 $\mu(\omega)=1$，因为在对电离損失起重要作用的頻率下，物质的行为和非磁性物质相同。

$$\Delta\mathbf{A}-\frac{\hat{\varepsilon}}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}=-\frac{4\pi}{c}e\mathbf{v}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{v}t),$$
$$\hat{\varepsilon}\left(\Delta\varphi-\frac{\hat{\varepsilon}}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right)=-4\pi e\delta(\mathbf{r}-\mathbf{v}t). \tag{85.6}$$

我們把 $\mathbf{A}$ 和 φ 展开为坐标的傅立叶积分。在 (85.6) 式的两侧取傅立叶分量，我們得到（与 § 84 比較）

$$k^2\mathbf{A_k}+\frac{\hat{\varepsilon}}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A_k}}{\partial t^2}=\frac{e\mathbf{v}}{2\pi^2 c}e^{-i\mathbf{kv}t},$$
$$\hat{\varepsilon}\left(k^2\varphi_{\mathbf{k}}+\frac{\hat{\varepsilon}}{c^2}\frac{\partial^2\varphi_{\mathbf{k}}}{\partial t^2}\right)=\frac{e}{2\pi^2}e^{-i\mathbf{kv}t}.$$

由此看出，$\mathbf{A_k}$ 和 $\varphi_{\mathbf{k}}$ 与时間的关系由因子 $e^{-i\mathbf{kv}t}$ 給出。再引进符号 $\omega=\mathbf{kv}=k_x v$，我們得到

$$\mathbf{A_k}=\frac{e}{2\pi^2 c}\frac{\mathbf{v}}{k^2-\omega^2\dfrac{\varepsilon(\omega)}{c^2}}e^{-i\omega t},$$
$$\varphi_{\mathbf{k}}=\frac{e}{2\pi^2\varepsilon(\omega)}\frac{1}{k^2-\omega^2\dfrac{\varepsilon(\omega)}{c^2}}e^{-i\omega t}. \tag{85.7}$$

电場强度的傅立叶分量为

$$\mathbf{E_k}=\frac{i\omega}{c}\mathbf{A_k}-i\mathbf{k}\varphi_{\mathbf{k}}. \tag{85.8}$$

利用所得到的公式，和前一节內所进行的相同，可求得作用于粒子上的軔致力 $\mathbf{F}=e\mathbf{E}$①。采用相同的符号，我們現在求得这个力的数值为

$$F=\frac{ie^2}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{q_0}\frac{\left(\dfrac{1}{v^2}-\dfrac{\varepsilon}{c^2}\right)\omega q\,dq\,d\omega}{\varepsilon\left[q^2+\omega^2\left(\dfrac{1}{v^2}-\dfrac{\varepsilon}{c^2}\right)\right]}, \tag{85.9}$$

---

① 至于磁力 $\frac{e}{c}[\mathbf{vH}]$，从对称性看出，它变成零（我們这里不提这力与粒子的速度垂直因而一般对粒子不作功这一点）。

当 $c\to\infty$ 时，这个式子当然变成(85.4)式。

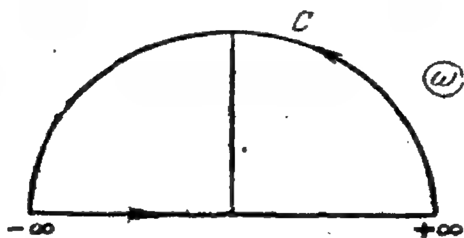
首先我們来对频率进行积分。注意到由于在复平面 ω 內进行积分，我們首先必須說明，被积式在上半平面的那些点处有极点。函数 $\varepsilon(\omega)$ 在这区域內旣无奇点，也无零点；因此，所求的极点只能是表达式

$$\omega^2\left(\frac{\varepsilon}{c^2}-\frac{1}{v^2}\right)-q^2$$

的零点。我們現在证明，当正的实数 q^2 为任何值时，这个式子只对 ω 的一个值变为零。

这证明的进行和 § 62 內证明函数 $\varepsilon(\omega)$ 的零点相类似。設

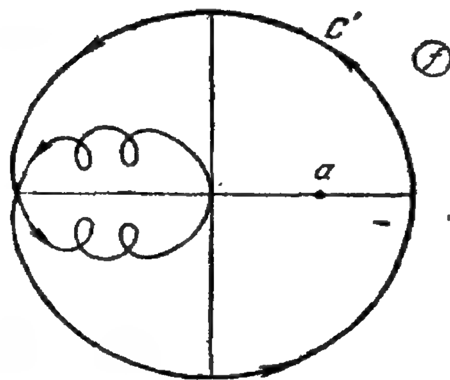
$$f(\omega)=\omega^2\left(\frac{\varepsilon(\omega)}{c^2}-\frac{1}{v^2}\right);$$



我們来研究积分

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{df(\omega)}{d\omega}\,\frac{d\omega}{f(\omega)-a},$$

这积分对由实軸和无穷大半圓所形成的迴路 C 进行(图 43)。函数 $f(\omega)$ 在上半平面內（以及实軸上①）无极点；因此上述积分直接給出函数 $f(\omega)-a$ 在上半平面內的零点数目。为了計算起見，我們把这积分写为



$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C'}\frac{df}{f-a}. \qquad (85.10)$$

图 43

当 $\omega=0$ 时，函数 $f=0$。当 ω 为正的实值时，我們有 $\operatorname{Im} f>0$，而当 ω 为負值时，有 $\operatorname{Im} f<0$，在无穷远处，$f\to-\omega^2\left(\frac{1}{v^2}-\frac{1}{c^2}\right)$；因此，当

① 在金屬內，当 $\omega=0$ 时 $\varepsilon(\omega)$ 有一极点，但 $\omega^2\varepsilon$ 总是趋近于零。

ω通过一个半圆时，f通过一无穷大的圆。由此看出，在f平面内的积分迴路C'的形状，如图43所示。設$a=q^2$为正实数（如图43上所示）。于是繞C'一周，复数宗量$f-a$改变2π，而且(85.10)的积分等于1。这样上述的論断即已被证明[①]。

而且容易看出，方程$f(\omega)-q^2=0$的这个唯一的根在虛軸ω上。实际上，当ω为純虛数时，函数$f(\omega)$以及函数$\varepsilon(\omega)$为实数，幷且取从0至∞的全部值，其中包含q^2的全部正值。

我們回到(85.9)內对$d\omega$的积分：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\left(\frac{1}{\varepsilon v^2}-\frac{1}{c^2}\right)\omega d\omega}{q^2-\omega^2\left(\frac{\varepsilon}{c^2}-\frac{1}{v^2}\right)}.$$

可以把它写成对迴路C的积分与对无穷大半圓的积分之差的形式。其中第二个积分等于

$$\int\frac{d\omega}{\omega}=i\pi,$$

而第一个积分等于被积式相对于它的唯一极点的留数乘上$2\pi i$。我們把$\omega(q)$理解为由下列等式

$$\omega^2\left(\frac{\varepsilon}{c^2}-\frac{1}{v^2}\right)=q^2 \qquad (85.11)$$

所定义的函数。于是按照求留数的熟知規则[②]，我們得到对迴路C的积分等于

$$2\pi i\frac{\omega\left(\frac{1}{\varepsilon v^2}-\frac{1}{v^2}\right)}{-\frac{d}{d\omega}\left[\omega^2\left(\frac{\varepsilon}{c^2}-\frac{1}{v^2}\right)\right]}=2\pi i\frac{\omega\left(\frac{1}{\varepsilon v^2}-\frac{1}{c^2}\right)}{-\frac{dq^2}{d\omega}}.$$

---

① 如果a为負数，則繞C'一周时宗量$f-a$改变4π，于是(85.10)的积分等于2，換句話說，方程$f(\omega)=-|a|$在上半平面內有两个零点。

② 表达式$f(z)/\varphi(z)$相对于极点$z=z_0$的留数等于$f(z_0)/\varphi'(z_0)$。

把所得到的式子集合起来，并代入(85.9)式，我們有

$$F=e^2\int_0^{q_0}\left[\frac{\omega\left(\frac{1}{\varepsilon v^2}-\frac{1}{c^2}\right)}{\frac{q\,dq}{d\omega}}+1\right]q\,dq,$$

或者在第一項內，用对 $d\omega$ 的积分代替对 dq 的积分，

$$F=e^2\int_{\omega(0)}^{\omega(q_0)}\left[\frac{1}{v^2\varepsilon(\omega)}-\frac{1}{c^2}\right]\omega\,d\omega+\frac{e^2q_0^2}{2}=$$

$$=\frac{e^2}{v^2}\int_{\omega(0)}^{\omega(q_0)}\left(\frac{1}{\varepsilon(\omega)}-1\right)\omega\,d\omega+\frac{e^2q_0^2}{2}+\frac{e^2}{2}\left(\frac{1}{v^2}-\frac{1}{c^2}\right)\times$$
$$\times\left[\omega^2(q_0)-\omega^2(0)\right]. \qquad (85.12)$$

大的 q 值相应于(85.11)式的根的大的絕对值 ω。与此相应，利用 $\varepsilon(\omega)$的表达式(84.9)，我們求得

$$\omega^2(q_0)=-\frac{v^2}{\beta^2}\left(q_0^2+\frac{4\pi Ne^2}{mc^2}\right),$$

式中引进了符号：

$$\beta=\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}.$$

代入(85.12)式后，我們得到

$$F=\frac{e^2}{v^2}\int_{\omega(0)}^{ivq_0/\beta}\left[\frac{1}{\varepsilon(\omega)}-1\right]\omega\,d\omega-\frac{2\pi Ne^4}{mc^2}-\frac{e^2\beta^2}{2v^2}\,\omega^2(0) \qquad (85.13)$$

(在积分內，只須保留 $\omega(q_0)$內的主要項$\frac{ivq_0}{\beta}$)。

(85.13)式的积分对 ω 的純虛数进行。我們引进实变数：$\omega''\equiv\frac{\omega}{i}$，把积分的下限表示为 $\omega(0)=i\xi$，同时再引进符号(84.6) $\frac{1}{\varepsilon}=\eta$。我們必須計算的积分为

$$-\int_{\xi}^{vq_0/\beta}\left[\eta(i\omega'')-1\right]\omega''d\omega''.$$

函数 $\eta(\omega)$ 在虚軸上的值可以用它的虚数部分在实軸上的值来表示为

$$\eta(i\omega'')-1=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{x\eta''(x)}{x^2+\omega''^2}dx$$

[与(62.17)式比較]。因此，我們得到积分为（与 vq_0 比較，我們略去了 x）

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\int_\xi^{vq_0/\beta}\frac{x|\eta''(x)|\omega''d\omega''dx}{x^2+\omega''^2}=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty x|\eta''(x)|\ln\frac{v^2q_0^2}{\beta^2(x^2+\xi^2)}dx.$$

将这結果代入(85.13)式，而且为簡化书写起見，我們引进符号:

$$\ln\Omega=\frac{1}{2}\overline{\ln(\omega^2+\xi^2)},\tag{85.14}$$

式中短横表示权重为 $\omega|\eta''(\omega)|$ 的平均，如在(84.11)式中的一样。于是，我們得到

$$F(q_0)=\frac{4\pi Ne^4}{mv^2}\ln\frac{q_0v}{\beta\Omega}-\frac{2\pi Ne^4}{mc^2}+\frac{e^2\beta^2}{2v^2}\xi^2.\tag{85.15}$$

进一步研究这公式时，必須分别考虑两种情况。首先假定，媒质是电介质，而粒子的速度滿足条件:

$$v^2<\frac{c^2}{\varepsilon_0},\tag{85.16}$$

式中 $\varepsilon_0=\varepsilon(0)$ 为介电常数的静电值。在虚軸上，函数 $\varepsilon(\omega)$ 从 $\omega==0$ 时的 $\varepsilon_0>1$ 单調地減小为 $\omega=i\infty$ 时的 $\varepsilon=1$。但(85.11)式左側的式子这时单調地从 0 增加到 ∞。因此，当 $q=0$ 时，(85.11)式也給出 $\omega=0$。由此可見，在(85.15)内必須令 $\xi=0$。这时 Ω 变成平均原子频率 $\overline{\omega}$ (84.11):

$$F(q_0)=\frac{4\pi Ne^4}{mv^2}\left[\ln\frac{q_0v}{\beta\overline{\omega}}-\frac{v^2}{2c^2}\right],\tag{85.17}$$

当 $v\ll c$ 时，这个公式变为(84.12)式，正是应当的。

q_0 值滿足条件 $q_0 \ll \frac{1}{a}$，其中 a 为原子間距离的数量級(在凝聚媒质內，a 为原子的綫度)。为了把这公式推广到动量和能量傳遞为很大值的区域，我們必須和前一节內所作的一样，把它和通常的碰撞理論公式"結合"起来。但是在这里，这种"結合"必須分两步进行。首先利用(84.13)式，过渡到相应于能量傳遞大于原子能量但仍为非相对論的 q 值区域。这时(85.17)式的形式不变，但其中可以引进 δ 电子的能量为 $\frac{\hbar^2 q^2}{2m}$。我們用 E_1 表示它，得到

$$F(E_1)=\frac{2\pi N e^4}{mv^2}\left[\ln\frac{2mE_1v^2}{\beta^2\hbar^2\overline{\omega}^2}-\frac{v^2}{c^2}\right]. \tag{85.18}$$

其次，我們利用相对論碰撞理論的公式，可以过渡到 E_1 取相对論值的区域，按照这理論，能量傳遞在 E' 和 $E'+dE'$ 內的韌致力等于

$$\frac{2\pi N e^4}{mv^2}\frac{dE'}{E'}, \tag{85.19}$$

如果 E' 小于快速粒子与自由电子碰撞时符合动量和能量守恒定律的极大能量傳遞 $E_{1\max}$ 的話[在非相对論情况下，这公式和(84.13)式相同]。因为(85.19)式积分时給出 $\ln E'$，因而十分明显，(85.18)式的形式不改变，因此它也适用于 $E_1 \ll E_{1\max}$ 的所有值。

重粒子(质量为 M)受到韌致时，傳遞給电子的极大能量为 $E_{1\max} \approx \frac{2mv^2}{\beta^2}$①。若 $E_{1\max}$ 仍小于快速粒子的总能量 E(为此必須 $E \ll M^2\frac{c^2}{m}$)，則自由电子所受到的能量損失的微分形式为

$$\frac{2\pi N e^4}{mv^2}\left(\frac{1}{E'}-\frac{\beta^2}{2mc^2}\right)dE',$$

这式子对 E' 的任何值均适合，而与重粒子的种类完全无关。能量

① 参閱"場論"第二版，§12。

傳遞为从 E_1 到 $E_{1\max}$ (又 $E_1 \leqslant E_{1\max}$)时的附加[相对于 (85.18) 式而言]能量損失, 在这种情况下为

$$\frac{2\pi N e^4}{mv^2}\left(\ln\frac{E_{1\max}}{E_1} - \frac{\beta^2 E_{1\max}}{2mc^2}\right) = \frac{2\pi N e^4}{mv^2} \times \times\left(\ln\frac{2mv^2}{\beta^2 E_1} - \frac{v^2}{c^2}\right). \tag{85.20}$$

把这个式加到(85.18)式上, 我們求得重粒子的总軔致为

$$F = \frac{4\pi N e^4}{mv^2}\left(\ln\frac{2mv^2}{\beta^2 h\overline{\omega}} - \frac{v^2}{c^2}\right). \tag{85.21}$$

公式(85.18)和(85.21)与由通常理論所得到的公式不同处是"电离能量"的定义現在为 $h\overline{\omega}$。

我們現在来討論第二种情况, 即粒子的速度滿足条件:

$$v^2 > \frac{c^2}{\varepsilon_0}, \tag{85.22}$$

特别是对于金屬常常是这种情况, 因为其中 $\varepsilon(0) = \infty$。(85.11)式左側的式子 $\omega^2\left(\frac{\varepsilon}{c^2} - \frac{1}{v^2}\right)$在这种情况下有两个零点在虛軸 ω 上——一个在 $\omega = 0$ 上, 另一个在 $\omega = i\xi$ 上, 其中 ξ 由下式定义

$$\varepsilon(i\xi) = \frac{c^2}{v^2}. \tag{85.23}$$

在从 0 到 $i\xi$ 的間隔內, 表达式 $\omega^2\left(\frac{\varepsilon}{c^2} - \frac{1}{v^2}\right)$是負的, 而当 $|\omega| > \xi$ 时, 它取从 0 到∞的全部正值。因此, 当 $q \to 0$ 时, (85.11)式的根在这种情况下趋近于 ξ 值, 这即是必須代入(85.14)和(85.15)內的值。

在这里我們要区别两种极限情况。如果 ξ 值小于原子頻率 ω_0, 則在(85.15)式內可以略去最后一項, 而 $\Omega \approx \overline{\omega}$。結果我們重新得到(85.17) 式。特别有意义的是相反的极限情况, 即 $\xi \gg \omega_0$。因为当 ξ 的值很大时, 函数 $\varepsilon(i\xi)$趋近于 1, 因而由(85.23)式可

知，这种情况相应于粒子的超相对論速度。利用(84.9)式的 $\varepsilon(\omega)$，我們把(85.23)式写为

$$1+\frac{4\pi Ne^2}{m\xi^2}=\frac{c^2}{v^2},$$

由此得

$$\xi^2=\frac{4\pi Ne^2v^2}{mc^2\beta^2}\approx\frac{4\pi Ne^2}{m\beta^2}.$$

当粒子的速度增加时，条件 $\xi\gg\omega_0$ 最后变成在任何媒质内都满足，也即是不論电子密度 N 为何值(其中也包括气体的情况)。但是 N 越小，也即是媒质越稀薄，所需的速度越大。

从(85.14)式，我們現在有 $\Omega\approx\xi$；也令 $v\approx c$，我們发現(85.15)式内的最后两項互相消去，余下

$$F(q_0)=\frac{2\pi Ne^4}{mc^2}\ln\frac{mc^2q_0^2}{4\pi Ne^2}.$$

用和上面相同的方式，我們把这公式推广到动量和能量傳遞为很大值的区域，我們得到能量傳遞不超过 E_1(而且 $E_1\ll E_{1\max}$) 的超相对論粒子的能量損失的表达式为

$$F(E_1)=\frac{2\pi Ne^4}{mc^2}\ln\frac{m^2c^2E_1}{2\pi Ne^2\hbar^2}. \tag{85.24}$$

这結果和由未計及媒质的极化的通常碰撞理論所給出的大不相同。按照通常的碰撞理論，在超相对論的情况下，当粒子的能量增加时，韌致力 $F(E_1)$ 也继續增加(虽然是按照指数定律，增加較慢)。但媒质的极化引起电荷的屏蔽作用，結果能量損失的增加最后終止，并且趋近于一有限的极限值，由不包含 β 的 (85.24) 式給出。

也可以推导出重粒子的总韌致力的公式，其能量傳遞可以一直到 $E_{1\max}$(只要 $E_{1\max}$ 小于粒子本身的能量)。再利用 (85.20) 式 (其中現在可以令 $v=c$)，我們得到

$$F=\frac{2\pi Ne^4}{mc^2}\left[\ln\frac{m^3c^4}{\pi Ne^2h^2\beta^2}-1\right]. \tag{85.25}$$

我們看到，总韌致力随粒子的速度继續增加——依靠有大能量傳遞的“近”碰撞，这时媒质的极化沒有屏蔽作用。但是这种增加要比未計及媒质的极化的理論所給出的慢得多。

我們还注意到，在(85.24)和(85.25)式的对数宗量內出現的电子密度N，使超相对論粒子的能量損失具有以下的特征：当这粒子穿过含有相同电子数（每一平方厘米表面）的不同的物质层时，在N較大的物质內能量損失要小些。

最后我們指出，由測量快速粒子在物质內的能量損失，在原則上可以求出这种物质的函数$\varepsilon(i\xi)$。容易证明，相应于情况(85.22)的F的精确表达式滿足关系式：

$$\frac{d[(F-F_0)v^2]}{d(v^2)}=-\frac{e^2\xi^2}{2c^2}, \tag{85.26}$$

式中F_0为(85.18)式或(85.21)式所給出的值。F是测量得到的，而导数$\frac{d(F_0v^2)}{d(v^2)}$只包含已知量(N, v)，因而可以計算出来。由此可見，利用(85.26)式，可以使ξ的每一个值与v的一定值对应，然后从(85.23)式，可以算出相应的$\varepsilon(i\xi)$的值。

§86. 契連科夫輻射

在透明媒质內运动的带电粒子，在一定的条件下发射出一种奇异的輻射，它最初由 П. А. 契連科夫和 С. И. 瓦維洛夫观察到，并由 И. Е. 塔姆和 И. М. 弗兰克作出了理論解釋和計算(1937)。但应着重指出，这种輻射和实际上常常由快速运动电子所发出的韌致輻射毫无共同之处。后一种輻射是当运动电子与原子碰撞时由运动电子本身发射出来的。而契連科夫現象实质上是媒质在运动粒子的場的作用下所发射出来的一种輻射。当粒子具有很大的质

量时，这两种輻射的差别特别明显地表現出来：这时韧致輻射完全消失，而契連科夫輻射一般不发生变化。

在透明媒质內傳播的电磁波的波矢量和頻率的关系为 $k=\frac{n\omega}{c}$，式中 $n=\sqrt{\varepsilon}$ 为实数折射率[①]。另一方面，我們看到，在媒质內匀速运动的粒子的場的傅立叶分量的頻率与波矢量的 x 分量（x 軸在粒子的速度方向）的关系为 $\omega=k_x v$。为了使这种分量代表自由傳播的波，关系式 $k=\frac{n\omega}{c}$ 和 $k_x=\frac{\omega}{v}$ 不应相互矛盾。因为必須 $k>k_x$，因而必須滿足条件：

$$v>\frac{c}{n(\omega)}. \tag{86.1}$$

由此可見，当粒子的速度超过媒质內該頻率的波的相速度时，即发生頻率为 ω 的輻射。

設 θ 为粒子运动方向与輻射方向間的夹角。于是我們有 $k_x=k\cos\theta=\left(\frac{n\omega}{c}\right)\cos\theta$，与等式 $k_x=\frac{\omega}{v}$ 比較，我們得到

$$\cos\theta=\frac{c}{nv}. \tag{86.2}$$

由此可見，θ 角的一定值相应于一定頻率的輻射。換句話說，每种頻率的輻射朝粒子运动方向向前发出，并且分布于开度角为 θ 的圓錐面上，其中 θ 由(86.2)式得出。因此，輻射的角分布和按頻率的分布形成一定的关系。

电磁波的輻射（当它存在时）引起运动粒子損失一定的能量。

---

① 我們仍然认为媒质是非磁性的和各向同性的。关于各向异性媒质內的契連科夫輻射，参閱下列著作：В. Л. Гинзбург, ЖЭТФ, 10, 608, 1940; А. А. Коломенский, ДАН СССР, 86, 1097, 1952; М. И. Каганов, ЖЭТФ, 23, 507, 1953。

当介电柱体放在介电常数不同的媒质內，沿这介电柱体軸运动的粒子所发出的契連科夫輻射，参閱 В. Л. Гинзбург 和 И. М. Франк, ДАН СССР, 56, 699, 1947。

这种损失为前一节所計算的总损失的一部分，虽然是很小的一部分①。在这种意义上，把总损失称为"电离损失"并不是十分精确的。我們現在从总損失中来找出这一部分；同时我們求出契連科夫輻射的强度。

按照(85.9)式，在頻率間隔 $d\omega$ 內的能量損失由下式給出

$$dF=-d\omega\frac{ie^2}{\pi}\Sigma\omega\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{v^2\varepsilon}\right)\int\frac{qdq}{q^2-\omega^2\left(\frac{\varepsilon}{c^2}-\frac{1}{v^2}\right)},$$

式中符号 Σ 表示必須对含有 $\omega=\pm|\omega|$ 的各項求和。引进新变数：

$$\xi=q^2-\omega^2\left(\frac{\varepsilon}{c^2}-\frac{1}{v^2}\right).$$

于是

$$dF=-d\omega\frac{ie^2}{2\pi}\Sigma\omega\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{v^2\varepsilon}\right)\int\frac{d\xi}{\xi}.$$

沿 ξ 的实軸积分时，必須以某种方式繞过奇点 $\xi=0$（恰好它相当于滿足关系式 $q^2+k_x^2=k^2$）。繞过的方向取决于，虽然我們仍假定 $\varepsilon(\omega)$ 为实数（媒质是透明的！），但实际上它包含有小的虛数部分，这虛数部分当 $\omega>0$ 时为正的，$\omega<0$ 时为負的。相应地，ξ 也包含有負的或正的小虛数部分，因而必須沿通过实軸下面或上面的路綫进行积分。这表明，当我們把积分路綫移到实軸上时，必須从下面或上面繞过奇点。这样的繞过也对 dF 作出貢献，而实数部分在取和时完全消去。設沿无限小半圓繞过奇点，我們得到

$$\Sigma\omega\int\frac{d\xi}{\xi}=\omega\left\{\int_{\vee}\frac{d\xi}{\xi}-\int_{\wedge}\frac{d\xi}{\xi}\right\}=2i\omega\pi.$$

这样一来，我們最后得到公式

$$dF=\frac{e^2}{c^2}\left(1-\frac{c^2}{v^2n^2}\right)\omega\,d\omega, \tag{86.3}$$

这公式給出頻率間隔 $d\omega$ 內的輻射强度。按照 (86.2)，这輻射集

① 这損失內不包括軔致輻射。

中在角度 $d\theta$ 內:

$$d\theta=\frac{c}{vn^2\sin\theta}\frac{dn}{d\omega}d\omega. \tag{86.4}$$

将(86.3)式对媒质透明区域內的全部频率进行积分，就得到总輻射强度。

也很容易說明契連科夫輻射的偏振問題。从(85.7)式看出，輻射場的矢量势沿速度 $\mathbf{v}$ 的方向。因此磁場 $\mathbf{H_k}=i[\mathbf{kA_k}]$垂直于通过 $\mathbf{v}$ 和射綫方向 $\mathbf{k}$ 的平面。但电場(在輻射的"波带"內)垂直于磁場，因而也在上述平面內。

研究物质媒质內运动的粒子的輻射問題，我們还可以提到另一种效应，这种效应的必然存在，已由 В. Л. 金茲堡和 И. М. 弗兰克指出：当粒子从一种媒质通过另一种媒质时，必須发出輻射。这种"跃迁"輻射在原理上与契連科夫輻射不同的地方是，当粒子为任何速度时都必須发生，而不仅限于速度超过媒质內光的相速度的情况。它与軔致輻射也毫无共同之处(軔致輻射也是当带电粒子入射到两种媒质的分界面时发生的)。和对契連科夫輻射一样，对于质量无限大的粒子，这种差别也特别明显地表現出来，这时軔致輻射完全消失，而"跃迁"輻射还存在①。

---

① 有关"跃迁"輻射的詳細計算問題，参閱 В. Л. Гинзбург 和 И. М. Франк 的論文，ЖЭТФ, 16, 25, 1946。

第十三章　电磁起伏現象

§87. 一个量的量子起伏的普遍理論

电磁起伏現象的研究，可以根据起伏現象的普遍理論来进行。但是，这时，通常的理論是不够的，因为其中假定了起伏是古典的（非量子的）和热力学性质的①。因此，我們在本节叙述不用上述假定的起伏的普遍理論。我們先研究只有一个起伏量 x 的情况；我們假定它是实数，并且这样定义它，当系統未受到外来的作用时，它的平均值等于零。

按照量子力学的规則，我們引进与物理量 $x(t)$ 对应的算符 $\hat{x}(t)$。我們定义它的“傅立叶分量”为②

$$\hat{x}_\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{x}(t)e^{i\omega t}dt, \tag{87.1}$$

或者反过来，

$$\hat{x}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{x}_\omega e^{-i\omega t}d\omega. \tag{87.2}$$

算符 $\hat{x}_\omega$ 一般說来不能与它共軛的算符 $\hat{x}_\omega^+ = \hat{x}_{-\omega}$ 对易。

在不同时刻量 $x(t)$ 的起伏之間的关联由函数

---

① 参閱“統計物理学”第三版，§§117—120。本节和下一节可以认为是“統計物理学”第十二章的继續。这里所用的符号对应于該章的符号。

② 写出的积分实际上是发散的，因为 $|t|\to\infty$ 时，$x(t)$ 并不趋近于零。但是这一情况对于下面推导計算有限均方值的公式并不重要。

我們很感謝 C. M. 雷托夫向我們指出这种求傅立叶分量的方法比“統計物理学”§117 内所用的方法优越。

$$\varphi(t'-t)\equiv\frac{1}{2}\overline{[\hat{x}(t)\hat{x}(t')+\hat{x}(t')\hat{x}(t)]} \qquad (87.3)$$

表征，其中横綫表示利用精确的量子力学几率求平均值①；由于状态是稳定的，这函数只依賴于差值 $\tau=t'-t$。将(87.2)式代入上式，我們得到

$$\varphi(\tau)=\frac{1}{2}\int\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{(\hat{x}_\omega\hat{x}_{\omega'}+\hat{x}_{\omega'}\hat{x}_\omega)}\,e^{i(\omega t+\omega' t')}d\omega d\omega'.$$

等式右側的积分，如果被积式內包含有 $\omega+\omega'$ 的 δ 函数，将只是 $t-t'$ 的函数这表明必須

$$\frac{1}{2}\overline{(\hat{x}_\omega\hat{x}_{\omega'}+\hat{x}_{\omega'}\hat{x}_\omega)}=(x^2)_\omega\delta(\omega+\omega'). \qquad (87.4)$$

我們必須把这式子看作是量 $(x^2)_\omega$ 的定义。我們注意到这个量明显地为实数［只要注意到(87.4)式的左側和右側一样，只当 $\omega'=-\omega$ 时才不为零，而变换到复数共軛表达式时表明 ω 变号，也即是簡单地 ω 与 ω' 換位］。

将(87.4)代入 $\varphi(\tau)$ 內，并对 $d\omega'$ 进行积分，我們得到

$$\varphi(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}(x^2)_\omega e^{-i\omega\tau}d\omega. \qquad (87.5)$$

特别是 $\varphi(0)$ 不外是起伏量的均方值。由此可見②，

$$\overline{x^2}=\int_{-\infty}^{+\infty}(x^2)_\omega d\omega. \qquad (87.6)$$

① 大家知道，按照統計学的基本原理，平均后的結果实际上并不依賴于是用力学方式按系統稳定态的精确波函数求平均值，还是利用吉布斯分布求平均值。差别只在于在第一种情况下，所求的量是用物体的总能量表示，而在第二种情况下是用它的溫度来表示。

② 与“統計物理学”第十二章的公式比較时，必須注意到：这里所引进的量 $(x^2)_\omega$ 的(在那里表示为 $\lim|x_\omega|^2$)更为方便的归一化，与前者相差一个因子 2π。

我們看到，量$(x^2)_\omega$(或者量$2(x^2)_\omega$，若只是对ω的正值进行积分)正好是起伏量的均方值的“譜密度”。

設量x所属的物体在某一个給定(n—M)的稳定态下。則(87.4)式的平均值为算符的对应的对角矩陣元:

$$\frac{1}{2}(\hat{x}_\omega\hat{x}_{\omega'}+\hat{x}_{\omega'}\hat{x}_\omega)_{nn}=\frac{1}{2}\sum_m[(x_\omega)_{nm}(x_{\omega'})_{mn}+$$

$$+(x_{\omega'})_{nm}(x_\omega)_{mn}],$$

式中求和对全部的能級譜进行(由于算符$\hat{x}_\omega$是复数，方括号內的两項并不相等)。

算符$\hat{x}$对时間的依賴关系表明，計算它的矩陣元必須利用含时間的波函数。因此，我們有

$$(x_\omega)_{nm}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}x_{nm}e^{i(\omega_{nm}+\omega)t}dt=x_{nm}\delta(\omega_{nm}+\omega). \quad (87.7)$$

式中x_{nm}为用物体內粒子坐标表示的算符$\hat{x}$的不含时間的寻常矩陣元，而$\omega_{nm}=\frac{(E_n-E_m)}{h}$为状态$n$和$m$之間的跃迁頻率。这样一来，

$$\frac{1}{2}(\hat{x}_\omega\hat{x}_{\omega'}+\hat{x}_{\omega'}\hat{x}_\omega)_{nn}=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_m|x_{nm}|^2[\delta(\omega_{nm}+\omega)\delta(\omega_{mn}+\omega')+$$

$$+\delta(\omega_{nm}+\omega')\delta(\omega_{mn}+\omega)]$$

(此处已計及由于x为实数，$x_{nm}=x^*_{mn}$)。显然，方括号内的δ函数的乘积可以改写为

$$\delta(\omega_{nm}+\omega)\delta(\omega+\omega')+\delta(\omega_{mn}+\omega)\delta(\omega+\omega')$$

然后与(87.4)比較，我們得到下列公式:

$$(x^2)_\omega=\frac{1}{2}\Sigma|x_{nm}|^2[\delta(\omega+\omega_{nm})+\delta(\omega+\omega_{mn})]. \quad (87.8)$$

关于这个式子的书写形式，我們还要作如下的說明。虽然宏观物体的能級严格說来是分立的，但它們排列得如此密集，以致实际上构成連續譜。不用 δ 函数也可以写出(87.8)式，如果将它对很小的(但包含很多能級的)频率間隔求平均。若 $\Gamma(E)$ 为物体的小于 E 的能級的数目，则

$$(x^2)_\omega=\frac{h}{2}\,|x_{nm}|^2\left|\frac{d\Gamma}{dE_m}+\frac{d\Gamma}{dE'_m}\right|,$$

式中 $E_m=E_n+h\omega$，$E'_m=E_n-h\omega$。

我們現在假定，物体受到周期性的(频率为 ω)扰动，扰动的能量与量 x 成正比。我們把扰动算符写为

$$\hat{V}=-f\hat{x}=-\frac{1}{2}(f_0e^{-i\omega t}+f_0^*e^{i\omega t})\hat{x}, \tag{87.9}$$

式中 f_0 为常数。作为举例說明，例如，我們指出，量 x 可以是系統的偶极矩，偶极矩的算符为 $\mathscr{D}=\Sigma e\mathbf{r}$，它对系統內所包含的全部电荷求和。在这种情况下，扰动为外加周期电場的作用。

系統在扰动的影响下发生跃迁，而且 $n\to m$ 的跃迁几率(单位时間內)由下列公式給出①

$$w_{nm}=\frac{\pi|f_0|^2}{2h^2}|x_{mn}|^2\{\delta(\omega+\omega_{mn})+\delta(\omega+\omega_{nm})\}. \tag{87.10}$$

这式子內的两項分别来源于(87.8)式內的两項。在每次跃迁时，系統吸收(或放出)量子 $h\omega_{mn}$。总和

$$Q=\sum_m w_{nm}h\omega_{mn}$$

給出物体在单位时間內所吸收的平均能量；这能量的来源为外部扰动，而被物体吸收后在物体內部耗散。将(87.10)式代入，我們得到

① 参閱"量子力学"，§ 42。

$$Q=\frac{\pi}{2\hbar}|f_0|^2\sum_m|x_{nm}|^2\{\delta(\omega+\omega_{mn})+\delta(\omega+\omega_{nm})\}\omega_{mn},$$

或者考虑到 δ 函数只在宗量等于零时才不为零，于是

$$Q=\frac{\pi}{2\hbar}\omega|f_0|^2\sum_m|x_{nm}|^2\{\delta(\omega+\omega_{nm})-\delta(\omega+\omega_{mn})\}. \quad (87.11)$$

扰动对物体的作用，用由下列方式所定义的量 α 来表示，更为方便。当扰动不存在时，量 x 的平均值(对物体的量子力学状态求平均)等于零。当外部扰动出現时，$\bar{x}$ 不为零，而与扰动的数值成正比。我們把它写为

$$\bar{x}=\frac{1}{2}(\alpha f_0e^{-i\omega t}+\alpha^*f_0^*e^{i\omega t}). \quad (87.12)$$

这个等式也代表量 $\alpha(\omega)$ 的定义(若利用含有时間因子 $e^{-i\omega t}$ 的 x 和 f 的复数表示，則它們之間的关系可写为 $\bar{x}=\alpha f$)。

能量的吸收也可以用量 α 来表示。为此我們利用下列情况：物体的平均内能对时間的导数 $\frac{d\mathscr{U}}{dt}$ 等于物体的哈密頓函数对时間的偏导数的平均值①：

$$\frac{d\mathscr{U}}{dt}=\overline{\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial t}},$$

因为在 $\hat{\mathscr{H}}$ 内只是扰动 $\hat{V}$ 与时間明显地有关，因而我們有 $\dot{\mathscr{U}}=-\dot{f}\bar{x}$。这样一来，我們得到一个簡单的公式：

$$\frac{\partial\mathscr{U}}{\partial t}=-\frac{\partial f}{\partial t}\bar{x}=\frac{i\omega}{2}(f_0e^{-i\omega t}-f_0^*e^{i\omega t})\bar{x}, \quad (87.13)$$

这公式在上述理論的应用上起着非常重大的作用。在我們对某种具体过程选擇了量 x 以后，若已知道能量变化的具体表达式，則将后者与(87.13)式进行比較，就可以确定那一个量起着 f 的作用。

在(87.13)式內代入(87.12)式的 $\bar{x}$，并对外部扰动的一个周

① 参閱"統計物理学"第三版，§ 11。

期求平均值，我們就可得到 1 秒内的平均能量耗散 Q。这时含有因子 $e^{\pm 2i\omega t}$ 的項消去，于是我們得到

$$Q=\frac{i\omega}{4}(\alpha^*-\alpha)|f_0|^2=\frac{\omega}{2}\alpha''|f_0|^2, \qquad (87.14)$$

式中 $\alpha''(\omega)$ 为 $\alpha(\omega)$ 的虚数部分。由比較(87.11)和(87.14)式，我們求得

$$\alpha''(\omega)=\frac{\pi}{h}\sum_m|x_{nm}|^2\{\delta(\omega+\omega_{nm})-\delta(\omega+\omega_{mn})\}. \qquad (87.15)$$

这样計算出来的量 $(x^2)_\omega$ 和 α'' 之間存在一个簡单的关系。但是只有在把这些量用物体的溫度表示出来以后，这关系才显示出来。为此，我們利用吉布斯分布求平均(比較 491 頁的底注)。对于 $(x^2)_\omega$，我們有

$$(x^2)_\omega=\frac{1}{2}\sum_n\sum_m e^{\frac{\mathscr{F}-E_n}{T}}|x_{nm}|^2\{\delta(\omega+\omega_{nm})+\delta(\omega+\omega_{mn})\},$$

式中 E_n 为物体的能級，$\mathscr{F}$ 为物体的自由能，T 为它的絕对溫度。因为現在是对二个下角标 n 和 m 求和，因而可以交換它們的符号。展开大括号内的式子，并在第二項内将 m 和 n 互換，我們得到

$$(x^2)_\omega=\frac{1}{2}\sum_n\sum_m\left(e^{\frac{\mathscr{F}-E_n}{T}}+e^{\frac{\mathscr{F}-E_m}{T}}\right)|x_{nm}|^2\delta(\omega+\omega_{nm})=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_n\sum_m e^{\frac{\mathscr{F}-E_n}{T}}\left(1+e^{\frac{h\omega_{nm}}{T}}\right)|x_{nm}|^2\delta(\omega+\omega_{nm}),$$

或者由于在求和的表达式内存在 δ 函数，有

$$(x^2)_\omega=\frac{1}{2}\left(1+e^{-\frac{h\omega}{T}}\right)\sum_n\sum_m e^{\frac{\mathscr{F}-E_n}{T}}|x_{nm}|^2\delta(\omega+\omega_{nm}).$$

由完全类似的方式，我們得到

$$\alpha''=\frac{\pi}{h}\left(1-e^{-\frac{h\omega}{T}}\right)\sum_n\sum_m e^{\frac{\mathscr{F}-E_n}{T}}|x_{nm}|^2\delta(\omega+\omega_{nm}).$$

将这两个式子相互比較，我們发現

$$(x^2)_\omega = \frac{h\alpha''}{2\pi}\operatorname{cth}\frac{h\omega}{2T} = \frac{h\alpha''}{\pi}\left\{\frac{1}{2} + \frac{1}{e^{\frac{h\omega}{T}} - 1}\right\}. \tag{87.16}$$

起伏量的总均方值由下列积分给出:

$$\overline{x^2} = \frac{h}{\pi}\int_0^\infty \alpha''(\omega)\operatorname{cth}\frac{h\omega}{2T}d\omega. \tag{87.17}$$

这些重要的公式是由 H. 卡倫 (Kallen) 和 T. 維耳頓(Welton)在1951年导出的，这些公式把物理量的起伏与系統受到外部扰动时的耗散性质联系了起来。我們注意到，(87.16)式大括号內的因子在形式上代表頻率为 ω 的振子在溫度 T 时的平均能量(用 $h\omega$ 作单位)；$\frac{1}{2}$ 这一項对应于零振动。

上面得到的結果可以表达成另一种形式，如果我們从純粹形式的观点出发，把量 x 的自发起伏看成是某种虛构的“机遇力”f 作用的結果。这时方便的是这样引进“傅立叶分量”x_ω 和 f_ω，使 x 仿佛是通常的量，而不是算符，再写出这些公式。x_ω 和 f_ω 之間的关系为

$$x_\omega = \alpha(\omega) f_\omega, \tag{87.18}$$

然后，均方起伏可以写为

$$\overline{x_\omega x_{\omega'}} = \alpha(\omega)\alpha(\omega')\overline{f_\omega f_{\omega'}} = (x^2)_\omega \delta(\omega + \omega') =$$
$$= |\alpha|^2 (f^2)_\omega \delta(\omega + \omega').$$

因而对于机遇力均方值的譜密度，从(87.16)式我們得到

$$(f^2)_\omega = \frac{h\alpha''}{2\pi|\alpha|^2}\operatorname{cth}\frac{h\omega}{2T}. \tag{87.19}$$

上面所介紹的对起伏的解釋，在理論的具体应用上，有一定的优越性。

由此可見，量 x 的起伏完全由函数 $\alpha(\omega)$ 的虛数部分給出。我們注意到，$\alpha(\omega)$ 本身可以視为复变数 ω 的函数，它具有一系列的

普遍性质，这些性质和 § 62 内所説明的函数 $\varepsilon(\omega)$ 的性质完全相似。这是完全自然的，因为 $\varepsilon(\omega)$ 是(87.12)式定义下的量的例子之一。

从(87.12)的定义看出，$\alpha(-\omega^*)=\alpha^*(\omega)$。其次，因为在某一时刻的 $\bar{x}$ 值只依賴于前一时刻上系統所受的外部扰动的过程，因而我們得到(与 § 62 比較)，量 $\alpha(\omega)$ 在上半平面內无极点。又从 $\alpha(\omega)$ 的虚数部分与耗散能量的关系式得出：当 ω 取不为零的实数值时，$\alpha''(\omega)$ 沒有零值。在 § 62 內曾經指出，从这些性质可以推导出函数的一系列其他的性质。我們在这里不再重新列出这些性质；其中也包括克拉梅尔-克朗尼公式(62.7)—(62.10)。

如果 $\alpha(\omega)$ 定义为：当 $\omega\to\infty$，$\alpha\to 0$，則在这些公式內必須以 α 代替 $\varepsilon-1$，例如，代替(62.7)式；我們有

$$\alpha(\omega)=\frac{1}{i\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\alpha(\xi)d\xi}{\xi-\omega}, \tag{87.20}$$

而代替(62.10)，我們有

$$\alpha'(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\xi\alpha''(\xi)}{\xi^2-\omega^2}d\xi. \tag{87.21}$$

当溫度 $T\gg h\omega$ 时，有 $\operatorname{cth}\left(\frac{h\omega}{2T}\right)\approx\frac{2T}{h\omega}$，因而(87.16)式变为

$$(x^2)_\omega=\frac{T}{\pi\omega}\alpha''(\omega). \tag{87.22}$$

其中已消去了量子常数，这符合于在这些条件下起伏是古典的这一事实。

如果不等式 $T\gg h\omega$ 对任何主要频率(即 $\alpha''(\omega)$ 显著不为零时的频率)都正确，則在积分式(87.17)內可以过渡到古典极限：

$$\overline{x^2}=\frac{2T}{\pi}\int_0^\infty\frac{\alpha''(\omega)}{\omega}d\omega.$$

但是按照(87.21)式，这里的积分可用静态值 α' 来表示，又因为 $\omega=0$ 时，虛数部分 $\alpha''=0$，因而我們有

$$\overline{x^2}=T\alpha(0), \tag{87.23}$$

这正是应当的[①]。

例 题

試用量子力学方法直接計算受扰动系統內 x 的平均值而推导出公式(87.21)。

解. 設 $\Psi_n^{(0)}(t)$ 为未受扰动系統的波函数。仿照普遍方法[②]，我們求得第一近似下受扰动系統的波函数为

$$\Psi_n=\Psi_n^{(0)}+\sum_m a_{mn}\Psi_m^{(0)},$$

式中系数 a_{mn} 滿足方程：

$$i\hbar\frac{da_{mn}}{dt}=V_{mn}e^{i\omega_{mn}t}=-\frac{1}{2}x_{mn}e^{i\omega_{mn}t}\times$$
$$\times(f_0e^{-i\omega t}+f_0^*e^{i\omega t}).$$

由此得

$$a_{mn}=\frac{1}{2\hbar}x_{mn}e^{i\omega_{mn}t}\left(\frac{f_0e^{-i\omega t}}{\omega_{mn}-\omega}+\frac{f_0^*e^{i\omega t}}{\omega_{mn}+\omega}\right);$$

这时假定 $|\omega|$ 不和頻率 ω_{mn} 中的任何一个頻率相等。利用所得到的函数 ψ_n，我們可以算出 $\hat{x}$ 的平均值为算符 $\hat{x}$ 的对应的对角矩陣元；在相同的近似下，我們有

$$\bar{x}=\int\Psi_n^*\hat{x}\Psi_n dq=\sum_m(a_{mn}x_{nm}e^{i\omega_{nm}t}+a_{mn}^*x_{mn}e^{i\omega_{mn}t})=$$
$$=\frac{1}{2\hbar}\sum_m\left[\frac{x_{mn}x_{nm}}{\omega_{mn}-\omega}+\frac{x_{mn}x_{nm}}{\omega_{mn}+\omega}\right](f_0e^{-i\omega t}+f_0^*e^{i\omega t})=$$

---

① 按照古典起伏理論的熟知公式，量 $\overline{x^2}$ 的計算需要知道 x 从零变到給定值时所必需作的功。这功等于 $x^2/2\alpha(0)$［这也导至(87.23)式］。实际上，由总和

$$\frac{x}{2\alpha(0)}-fx$$

取极小值的条件，給出 x 在外加恒定扰动作用下正确的平均值为 $\bar{x}=\alpha(0)f$。

② 参閱"量子力学"，§40。

$$=\frac{1}{h}\sum_{m}\frac{\omega_{mn}|x_{nm}|^2}{\omega_{mn}^2-\omega^2}(f_0e^{-i\omega t}+f_0^*e^{i\omega t}).$$

将这式子与(87.12)的定义比較，我們得到

$$\alpha'(\omega)=\frac{2}{h}\sum_{m}\frac{\omega_{mn}|x_{mn}|^2}{\omega_{mn}^2-\omega^2},\tag{1}$$

在这計算中，α 的虚数部分当然消去，因为我們已假定 $|\omega|\neq\omega_{mn}$。把(1)和(87.15)代入(87.21)式，容易证明，后者实际上恒被滿足(这时必須注意，在对 ξ 和 $\alpha''(\xi)$ 的正値进行积分时，不为零的只是 δ 函数中的一个函数)。

§88. 几个量的量子起伏的普遍理論

前一节得到的結果可以很容易推广到同时有几个起伏量 x_a 的情况。我們在这里只是引入結論，而不去詳細地重复計算的过程，它們和前一节內所进行的完全类似。

設 x_a 和 x_b 为所研究的物理量中的任意两个量。我們引进对称化的算符乘积的量子力学平均值:

$$\frac{1}{2}\overline{(\hat{x}_{a\omega}\hat{x}_{b\omega'}+\hat{x}_{b\omega'}\hat{x}_{a\omega})}=(x_ax_b)_\omega\delta(\omega+\omega'),\tag{88.1}$$

它推广了(87.4)式的結果。由类似于推导(87.8)式的計算，我們得到下面的結果:

$$(x_ax_b)_\omega=\frac{1}{2}\sum_{m}\{(x_a)_{nm}(x_b)_{mn}\delta(\omega+\omega_{nm})+$$
$$+(x_b)_{nm}(x_a)_{mn}\times\delta(\omega+\omega_{mn})\}.\tag{88.2}$$

系統所受的外部扰动可以写为

$$\hat{V}=-\sum_{a}f_a\hat{x}_a=-\frac{1}{2}\sum_{a}\{f_{0a}e^{-i\omega t}+f_{0a}^*e^{i\omega t}\}\hat{x}_a.\tag{88.3}$$

系統在单位时間內所吸收的能量，由类似于推导(87.11)的計算得到

$$Q=\frac{\pi}{2h}\omega\sum_{a,b}\sum_{m}f_{0a}f_{0b}^*[(x_a)_{mn}(x_b)_{nm}\delta(\omega+\omega_{nm})-$$

$$-(x_a)_{nm}(x_b)_{mn}\delta(\omega+\omega_{mn})]. \quad (88.4)$$

于是(87.12)的定义可以推广如下：

$$\bar{x}_a=\frac{1}{2}\sum_b(\alpha_{ab}f_{0b}e^{-i\omega t}+\alpha^*_{ab}f^*_{0b}e^{i\omega t}), \quad (88.5)$$

或者

$$\bar{x}_a=\sum_b\alpha_{ab}f_b,$$

如果全部量都表示成复数形式($\sim e^{-i\omega t}$)。于是内能变化用外加扰动表示为

$$\frac{d\mathcal{U}}{dt}=-\sum_a\dot{f}_a\bar{x}_a. \quad (88.6)$$

这公式和(87.13)式一样，在理論的具体应用中通常可用来确定量 x_a 和 f_a 間的实际对应关系。

将(88.6)代入(88.5)式，也对外部扰动的一个周期求平均值，于是代替(87.14)式，我們得到能量耗散的表达式为

$$Q=\frac{i\omega}{4}\sum_{a,b}(\alpha^*_{ab}-\alpha_{ba})f_{0a}f^*_{0b}, \quad (88.7)$$

与(88.4)式比較，得出

$$\alpha^*_{ab}-\alpha_{ba}=-\frac{2\pi i}{h}\sum_m[(x_a)_{mn}(x_b)_{nm}\delta(\omega+\omega_{nm})-$$

$$-(x_a)_{nm}(x_b)_{mn}\delta(\omega+\omega_{mn})]. \quad (88.8)$$

和前一节内一样，将这个式子和(88.2)式对吉布斯分布求平均值，結果我們得到下面的公式，它推广了前一节的关系式(87.16)：

$$(x_ax_b)_\omega=\frac{ih}{4\pi}(\alpha^*_{ba}-\alpha_{ab})\mathrm{cth}\frac{h\omega}{2T}. \quad (88.9)$$

和(87.18)与(87.19)式相类似，也可以把(88.9)式写成对应于虚构的“机遇力”的起伏的形式，这种力的作用結果等效于量 x_a

的自发起伏。为此，我們写出

$$x_{a\omega}=\sum_{b}\alpha_{ab}f_{b\omega},\quad f_{a\omega}=\sum_{b}\alpha_{ab}^{-1}x_{b\omega},\tag{88.10}$$

其次

$$(f_af_b)_\omega=\sum_{c,d}(\alpha_{ac}^{-1}\alpha_{bd}^{-1*})(x_cx_d)_\omega.$$

把(88.9)式代入上式，我們得到

$$(f_af_b)_\omega=\frac{ih}{4\pi}(\alpha_{ab}^{-1}-\alpha_{ba}^{-1*})\operatorname{cth}\frac{h\omega}{2T}.\tag{88.11}$$

由所得到的公式，可以对量 $\alpha_{ab}(\omega)$ 的对称性质作出一定的推論[①]。首先我們假定当时間变号时 x_a, x_b 保持不变；于是与它們对应的算符 $\hat{x}_a, \hat{x}_b$ 为純实数。此外，我們假定，物体不具有"磁結构"，并且不在外磁場內。这样一来，物体稳定态的波函数也是实数[②]。因此，量 x 的矩陣元也是实数，考慮到矩陣x_{nm} 为厄密型的，我們有 $x_{nm}=x_{mn}^*=x_{mn}$。于是我們看到，(88.8)式的右側，因而也是左側，对下角标 a, b 是对称的。由此可見，$\alpha_{ab}^*-\alpha_{ba}=\alpha_{ab}^*-\alpha_{ab}$ 或 $\alpha_{ab}+\alpha_{ab}^*=\alpha_{ba}+\alpha_{ba}^*$，也即是我們得到結論：$\alpha_{ab}$ 的实数部分是对称的。

但是每一个 α_{ab} 的实数部分 α'_{ab} 和虚数部分 α''_{ab} 之間的关系为綫性积分关系——即由克拉梅尔-克朗尼公式联系起来。因此，从 α'_{ab} 的对称性也可以得到 α''_{ab} 的对称性以及整个 α_{ab} 的对称性。由此可見，我們最后得到結果为

$$\alpha_{ab}=\alpha_{ba}.\tag{88.12}$$

---

① 这里所介紹的結果是由 Г. Каллен, М. Барраш, Ю. Джексон 和 Р. Грин 所得到的(1952)。

② 相互作用的粒子系統的精确能級，只在系統的总矩方向是簡并的。若假定物体在器壁为靜止的容器內，我們就可以消除这种簡并源。然后物体的能級将是非簡并的，因此，与它們对应的精确波函数可以选擇为实数。

如果物体在恒定外磁場 H 内，則关系式(88.12)的形式稍有改变。磁場内的系統的波函数不是实数，而具有下列的性质:

$$\psi^*(\mathbf{H})=\psi(-\mathbf{H}).$$

相应地量 x 的矩陣元为

$$x_{nm}(\mathbf{H})=x_{mn}(-\mathbf{H}),$$

而且(88.8)式右側的表达式，只在 H 同时变号的条件下交換下角标 a 和 b 时才不改变。因此，我們得到关系式为

$$\alpha_{ab}^*(\mathbf{H})-\alpha_{ba}(\mathbf{H})=\alpha_{ba}^*(-\mathbf{H})-\alpha_{ab}(-\mathbf{H}).$$

从克拉梅尔-克朗尼公式(87.20)还可以得到一个关系式，由于(87.20)式，我們有下列的关系式:

$$\alpha_{ba}=i\hat{J}(\alpha_{ba}),$$

式中 $\hat{J}$ 为实数綫性算符。把这个等式和厄密共軛等式 $\alpha_{ab}^*=-i\hat{J}(\alpha_{ab}^*)$相加，我們得到

$$\alpha_{ab}^*+\alpha_{ba}=-i\hat{J}(\alpha_{ab}^*-\alpha_{ba}),$$

当然这里取全部的 α_{ab} 值时H保持为同一值。由此看出，若差值 $\alpha_{ab}^*-\alpha_{ba}$ 具有某种对称性质，則 $\alpha_{ab}^*+\alpha_{ba}$ 之和也具有同样的性质，因而 α_{ab} 本身也是如此。由此可見，

$$\alpha_{ab}(\mathbf{H})=\alpha_{ba}(-\mathbf{H}). \tag{88.13}$$

最后，設在量 x 中有一些量当时間变号时改变正負号。与这种量对应的量子力学算符为純虛数，因而 $x_{nm}=x_{mn}^*=-x_{mn}$。如果两个量 x_a, x_b 是这种性质的，則全部的結論和关系式(88.12)仍然有效。如果两个量中只有一个在时間变号时改变正負号，則我們看到，交換下角标 a 和 b 后，(88.8)式的右側变号。相应地，代替(88.12)式，我們得到

$$\alpha_{ab}=-\alpha_{ba}. \tag{88.14}$$

由类似方式，在磁場内，代替(88.13)式，我們有

$$\alpha_{ab}(\mathbf{H})=-\alpha_{ba}(-\mathbf{H}). \tag{88.15}$$

当然，把(88.9)式看作是起伏量对时間对称的結果，也可以得到上述的各种关系式。在傅立叶分量內，时間变号表現为用$-\omega$代替ω(如果量x本身对时間变号是不变的)。在(88.1)式內(实际上只当$\omega'=-\omega$时不为零)，这表明ω和ω'互換位置，或者下角标a和b互換位置。因此，起伏的时間对称表明：

$$(x_a x_b)_\omega=(x_b x_a)_\omega,$$

也即是(88.9)式的左側以及右側对下角标a, b是对称的，于是我們又重新得到关系式(88.12)。对α_{ab}的对称性质的这种推导方式，和通常推导昂塞格动力系数对称原理相类似[①]；我們在下面将看到，(88.12)—(88.15)式可以看作是这原理的推广。

我們現在证明，上述的普遍理論与热力学起伏理論的相互关系如何？我們記住，我們称这样的量的起伏为热力学起伏，即当这些量給定以后，可以确定某一个非完全的平衡状态；換句話說，这个量的弛豫时間必須大于該系統內其他可能的趋近于平衡的过程的弛豫时間。对于这些量，下列形式的方程正确：

$$\dot{x}_a=-\sum_b \gamma_{ab}X_b,$$

这些方程描写不在平衡态下的閉合系統的行为(X_b表示系統的总熵的导数$-\frac{\partial \mathscr{S}}{\partial x_b}$)。如果系統不是閉合的，而是在外力的作用下，則在这些方程的右側必須引进附加項，我們把它們表示为y_b：

$$\dot{x}_a=-\sum_b \gamma_{ab}X_b+y_b. \tag{88.16}$$

很容易把y_b用表征扰动的量f_a来表示。

为此，我們假定物体上作用着静态力，也即是f_a保持恒定不变。这种作用引起平衡状态发生“移动”，这时量X_a的平均值已經

---

① 参閱“統計物理学”，第三版，§118。

不等于零。这些新的平均值可以按下列方式用 f_a 来表示。受到恒定扰动作用的物体的能量等于

$$\mathscr{U}=\mathscr{U}_0-\sum_a f_a\bar{x}_a,$$

式中 $\mathscr{U}_0$ 为扰动不存在时物体的能量。对$\mathscr{U}$求微分，我們得到

$$d\mathscr{U}=Td\mathscr{S}+\sum_a\frac{\partial\mathscr{U}}{\partial f_a}df_a.$$

但是按照普遍規則①，

$$\left(\frac{\partial\mathscr{U}}{\partial f_a}\right)_{\mathscr{S}}=\overline{\frac{\partial\hat{\mathscr{H}}}{\partial f_a}}=\overline{\frac{\partial\hat{V}}{\partial f_a}}=-\bar{x}_a,$$

于是

$$d\mathscr{U}=d(\mathscr{U}_0-\sum_a f_a\bar{x}_a)=Td\mathscr{S}-\sum_a\bar{x}_a df_a,$$

或者

$$d\mathscr{U}_0=Td\mathscr{S}+\sum_a f_a d\bar{x}_a.$$

由此求得平衡值为

$$X_a=-\left(\frac{\partial\mathscr{S}}{\partial\bar{x}_a}\right)_{\mathscr{U}_0}=\frac{f_a}{T}.$$

另一方面，在平衡态下，(88.16)式的右側必須等于零。因而我們看到，利用 f_a，这些方程可以写为

$$\dot{x}_a=-\sum_b\gamma_{ab}\left(X_b-\frac{f_a}{T}\right).\tag{88.17}$$

現在可以把上述普遍理論中出現的 α_{ab} 与动力系数 γ_{ab} 联系起来。为此将(88.5)式的 x_a 代入(88.17)式，而将 X_a 写成綫性組合形式：

$$X_a=\sum_b\beta_{ab}x_b.\tag{88.18}$$

① 参閱“統計物理学”，第三版，§ 11。

从(88.17)式分出含 $e^{-i\omega t}$ 和 $e^{i\omega t}$ 的項，我們得到

$$\sum_d i\omega\alpha_{ad}f_{0d} = \sum_{b,c,d}\gamma_{ab}\beta_{bc}\alpha_{cd}f_{0d} - \frac{1}{T}\sum_d \gamma_{ad}f_{0d},$$

由于 f_{0d} 是任意的，由此得到各系数間的关系式为

$$i\omega\alpha_{ad} - \sum_{b,c}\gamma_{ab}\alpha_{bc}\beta_{cd} = -\frac{\gamma_{ad}}{T},$$

或

$$\alpha_{ab} = \frac{1}{T}(\beta_{ab} - i\omega\gamma^{-1}_{ab})^{-1}, \qquad (88.19)$$

式中指数內的 -1 表示取逆矩陣。这也就是所求的关系式。

按照定义，量 β_{ab} 对下角标 a, b 是对称的（因为 $\beta_{ab} = -\frac{\partial^2 \mathscr{S}}{\partial x_a \partial x_b}$）。因此，从 α_{ab} 的对称性也可以得出 γ_{ab} 的对称性，也即是通常的动力系数对称原理①。

大家知道②，(88.17) 式还可以有另一种意义。也即是可以不把量 f_a 看作是对远离平衡态的系統的外部作用，而把它看成是“机遇力”，由于在方程內引入了这些力，可以使这些方程应用于閉合系統內量 x 的起伏变化。这样的解釋也相应于把基本方程写成(88.11)式的形式。

将(88.19)式代入(88.11)內，我們得到

$$(f_a f_b)_\omega = \frac{h\omega T}{4\pi}(\gamma^{-1}_{ab} + \gamma^{-1}_{ba})\operatorname{cth}\frac{h\omega}{2T},$$

或者对于量 $y_a = \sum_b \gamma_{ab}\frac{f_b}{T}$:

---

① 在(88.14)的情况下，必須 $\gamma_{ab} = -\gamma_{ba}$。这从 (88.19) 式也可以得出，如果我們注意到在这种情况下，$\beta_{ab} = 0$。实际上，β_{ab} 是二次乘积 $x_a x_b$ 的系数，这二次式給出偏离平衡态时的 $\mathscr{S}$ 的变化。但是熵对时間变号是不变量，而乘积 $x_a x_b$ 在現在的情况下当 t 用 $-t$ 代替时改变正負号，因而熵內不存在这样的项，也即是 $\beta_{ab} = 0$。

② 参閱“統計物理学”，第三版，§ 117 和 120。

$$(y_a y_b)_\omega = \frac{\hbar\omega}{4\pi T}(\gamma_{ab}+\gamma_{ba})\operatorname{cth}\frac{\hbar\omega}{2T}.$$

在古典极限下，也即是当 $\hbar\omega \ll T$ 时，得到

$$(y_a y_b)_\omega = \frac{1}{2\pi}(\gamma_{ab}+\gamma_{ba}),$$

这和古典量起伏理論的公式符合一致①。

§89. 綫性电路內的电流起伏

我們現在把 §87 內所闡述的普遍理論应用到綫性电路內电流起伏的有趣問題上[由 H. 奈屈斯特(Nyquist)在 1928 年最先进行研究]。

电流的起伏代表导体內的自由（也即是无外加电动势时发生的）电振蕩。在綫性閉合电路內，最有意义的电振蕩当然是使导綫內有总电流 J 流过的电振蕩。下面我們假定满足准稳定态条件——电路的綫度小于波长 $\lambda \sim \frac{c}{\omega}$。于是在电路的各个部分內总电流 J 相等，因而只是时間的函数。

为了求出电流起伏的譜分解，我們选擇 J 为 § 87 普遍公式內所出現的量 x。为了說明这种情况下的量 α 的物理意义，我們假定在电路內作用有外电动势 $\mathscr{E}$。于是电路內的能量耗散 $Q = J\mathscr{E}$。与(87.13)式比較，我們得到 $\dot{f} = -\mathscr{E}$，或者在这种綫性关系內，我們假定 f 和 $\mathscr{E}$ 与 $e^{-i\omega t}$ 成正比，

$$\mathscr{E} = i\omega f.$$

另一方面，在綫性电路內，电流和电动势的关系为 $\mathscr{E} = ZJ$，式中 $Z(\omega)$ 为电路內的阻抗(参閱 § 47)。因此，我們有

$$J = \frac{\mathscr{E}}{Z} = \frac{i\omega}{Z}f,$$

① 参閱"統計物理学"，第三版，(120.10)式。

由此得到 $\alpha(\omega)=\frac{i\omega}{Z(\omega)}$。虚数部分为

$$\alpha''=\mathrm{Im}\frac{i\omega}{Z}=\frac{\omega}{|Z|^2}R,$$

式中$R(\omega)=\mathrm{Re}\{Z(\omega)\}$。于是引起电路内电阻色散的現象的本质，对下面的公式是完全不重要的。

从(87.16)式，我們現在求得电流起伏为

$$(J^2)_\omega=\frac{h\omega}{2\pi|Z|^2}R\,\mathrm{cth}\frac{h\omega}{2T}. \tag{89.1}$$

也可以把这个公式写成另一种形式，如果把电流起伏看成是“机遇”电动势 $\mathscr{E}_\omega=Z(\omega)J_\omega$ 作用的結果。于是我們有

$$(\mathscr{E}^2)_\omega=\frac{h\omega}{2\pi}R(\omega)\mathrm{cth}\frac{h\omega}{2T}. \tag{89.2}$$

在古典情况下($h\omega\ll kT$)，

$$(\mathscr{E}^2)_\omega=\frac{T}{\pi}R(\omega). \tag{89.3}$$

§ 90. 电磁場的起伏

宏观电动力学中所出現的电磁量 E, H, …, 等等，是由求平均值而得到的，这种求平均值可以认为包括两步运算。如果为清楚起見，我們从古典的观点出发，則可以分为固定体积內所有粒子的位置不变时对物理无限小体积求平均和然后将所得到的結果对粒子的运动求平均。在研究电磁量的起伏时，我們所指的乃是只对物理无限小体积求平均值的量随时間的振蕩，下面所研究的全部量即是指这样的量而言。

应該指出的是，采用量子力学的观点时，对体积求平均当然不是对物理量本身而言，而是对它的算符而言；第二步求平均值是利用量子力学几率求出这个算符的数学期待值。因此，严格說来，下

面所出現的量 E, H, …必須理解为量子力学算符。但是这种情况完全不影响下述理論的最后結果，而且为简化公式的书写起見，我們把全部量看作为古典量。

由于物体內电荷的位置和运动的起伏振动的結果，产生自发的局部电矩和局部磁矩，物体单位体积的电矩和磁矩的数值，我們分别用$\frac{\mathbf{K}}{4\pi}$和$\frac{\mathbf{L}}{4\pi}$表示。这些电矩和磁矩，在某种意义上类似于热电体的自发极化和铁磁体的自发磁化，但当然和它們不同的地方是求平均值时它們变为零。起伏电場和磁場的感应强度和場强之間的关系由下式給出：

$$D_i = \hat{\varepsilon}_{ik} E_k + K_i, \quad B_i = \hat{\mu}_{ik} H_k + L_i, \tag{90.1}$$

而它們的"傅立叶分量"为

$$\begin{aligned} D_{i\omega} &= \varepsilon_{ik}(\omega) E_{k\omega} + K_{i\omega}, \\ B_{i\omega} &= \mu_{ik}(\omega) H_{k\omega} + L_{i\omega}. \end{aligned} \tag{90.2}$$

这时麦克斯韦方程变为

$$(\operatorname{rot} \mathbf{E}_\omega)_i = \frac{i\omega}{c}(\mu_{ik} H_{k\omega} + L_{i\omega}), \tag{90.3}$$

$$(\operatorname{rot} \mathbf{H}_\omega)_i = -\frac{i\omega}{c}(\varepsilon_{ik} E_{k\omega} + K_{i\omega}). \tag{90.4}$$

我們把 K 和 L 称为"外加"起伏感应强度；当然，这种名称带有純然的約定性质，并且只是着重于表明引入它們的形式方法，而不是强調它們的本质。

为了应用 §88 內导出的普遍公式，我們必須建立此处所研究的电磁量与出現在普遍理論中的量 x_a, f_a 之間的对应关系。我們按下面的方式来进行。我們从純粹形式的观点出发，把 K 和 L 看作是外部作用的結果，即从外部把一定的电流和电荷引到物体內的結果，而不是把它們看作自发产生的电矩和磁矩。我們現在来計算由这种作用所引起的物体能量的变化。

为此我們注意到，从麦克斯韦方程所得出的能量守恒方程为

$$\int\frac{1}{4\pi}\left\{\mathbf{E}\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}+\mathbf{H}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\right\}dV=-\frac{c}{4\pi}\oint[\mathbf{EH}]d\mathbf{f},$$

或者将(90.1)式代入以后，

$$\int\frac{1}{4\pi}\left\{E_i\frac{\partial}{\partial t}(\hat{\varepsilon}_{ik}E_k)+H_i\frac{\partial}{\partial t}(\hat{\mu}_{ik}H_k\right\}=$$

$$=-\frac{c}{4\pi}\oint[\mathbf{EH}]d\mathbf{f}-\frac{1}{4\pi}\int\left\{\mathbf{E}\frac{\partial\mathbf{K}}{\partial t}+\mathbf{H}\frac{\partial\mathbf{L}}{\partial t}\right\}dV.$$

由此看出，由上述“外部作用”所引起的能量变化由下列积分給出：

$$-\frac{1}{4\pi}\int\left\{\mathbf{E}\frac{\partial\mathbf{K}}{\partial t}+\mathbf{H}\frac{\partial\mathbf{L}}{\partial t}\right\}dV. \tag{90.5}$$

在 § 88 內，我們曾研究了起伏量 x_a 的分立值，而我們現在得到的是它的連續值(物体每一点处的場值)。我們暫时从純形式的方法来繞过这一不重要的困难，把物体的体积分为小而有限的部分 ΔV，并且研究每一部分內的某一平均場值。我們在最后的公式內过渡到无限小体积元。这样一来，代替(90.5)式內的积分，我們有总和：

$$-\frac{1}{4\pi}\sum\left\{\mathbf{E}\frac{\partial\mathbf{K}}{\partial t}+\mathbf{H}\frac{\partial\mathbf{L}}{\partial t}\right\}dV,$$

上式对 ΔV 的全部求和。

将这式子与(88.6)式比較，我們看到，如果选擇每一部分 ΔV 內的矢量 $\mathbf{E}\frac{\Delta V}{4\pi}$、$\mathbf{H}\frac{\Delta V}{4\pi}$ 的分量为 x_a，則对应的量 f_a 即为矢量 $\mathbf{K}$ 和 $\mathbf{L}$ 的分量：

$$\begin{aligned}x_a&\longrightarrow\mathbf{E}\frac{\Delta V}{4\pi},\quad \mathbf{H}\frac{\Delta V}{4\pi},\\ f_a&\longrightarrow\mathbf{K},\qquad\quad \mathbf{L}.\end{aligned} \tag{90.6}$$

关系式(88.10)

$$f_{a\omega}=\sum_b\alpha_{ab}^{-1}(\omega)x_{b\omega} \tag{90.7}$$

給出 f_ω 与 x_ω 間的关系，在这种情况下，相当于麦克斯韦方程(90.3)和(90.4)，由此我們有

$$K_{i\omega}=-\varepsilon_{ik}E_{k\omega}+\frac{ic}{\omega}(\mathrm{rot}\,\mathbf{H}_\omega)_i,$$
$$L_{i\omega}=-\mu_{ik}H_{k\omega}-\frac{ic}{\omega}(\mathrm{rot}\,\mathbf{E}_\omega)_i. \tag{90.8}$$

将(90.8)与(90.7)式比較，并考虑到(90.6)的定义，可以求出系数 α_{ab}^{-1}，而且下角标 a, b 标出矢量 $\mathbf{E}, \mathbf{H}$ 的分量和取它們的值的部分 ΔV。

(90.8)內的微分算符rot这时必須理解为在分立的点处(例如 ΔV 的中心)所定义的差分算符。这些算符的具体形式完全是不重要的，因为这里只要注意到，在(90.8)的两个等式內，分别作用在 $\mathbf{H}_\omega$ 和 $\mathbf{E}_\omega$ 上的算符是純虛数，而且只是正負号不同。这表明，将 $\mathbf{K}$ 和 $\mathbf{L}$ 的值与空間不同点处的 $\mathbf{H}$ 和 $\mathbf{E}$ 的值分别联系起来的系数 α_{ab}^{-1} 滿足下列关系式：

$$\alpha_{ab}^{-1}=(\alpha_{ab}^{-1})^*.$$

按照普遍公式(88.11)，由此立即得到

$$(K_i^{(1)}K_k^{(2)})_\omega=0, \tag{90.9}$$

式中上角标(1)和(2)表示，这些量分别取在半徑矢量为 $\mathbf{r}_1$ 和 $\mathbf{r}_2$ 的点处；(90.9)式无論当 $\mathbf{r}_1\neq\mathbf{r}_2$ 或 $\mathbf{r}_1=\mathbf{r}_2$ 时都正确。

其次，从(90.8)式的第一式[考虑到(90.6)式]，我們看到，在系数 α_{ab}^{-1} 中把 $K_{i\omega}$ 值和 $E_{k\omega}$ 值联系起来的那些系数，如果 $\mathbf{K}_\omega$ 和 $\mathbf{E}_\omega$ 取在空間同一点处，則它們等于 $-\varepsilon_{ik}\dfrac{4\pi}{\Delta V}$，如果 $\mathbf{K}_\omega$ 和 $\mathbf{E}_\omega$ 取在不同点处，則它們等于零。因此按照(88.11)式，我們有

$$(K_i^{(1)}K_k^{(2)})=0 \quad (\mathbf{r}_1\neq\mathbf{r}_2),$$
$$(K_iK_k)_\omega=i\hbar(\varepsilon_{ki}^*-\varepsilon_{ik})\frac{1}{\Delta V}\operatorname{cth}\frac{\hbar\omega}{2T}.$$

現在过渡到极限 $\Delta V\to 0$, 显然, 我們可以将上述两式写成一个式子:

$$(K_i^{(1)}K_k^{(2)})_\omega = i\hbar(\varepsilon_{ki}^* - \varepsilon_{ik})\delta(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)\,\mathrm{cth}\frac{\hbar\omega}{2T}, \qquad (90.10)$$

式中 $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ 为物体任何两点的半徑矢量。下面我們假定物体不在外加恒定磁場内; 于是 $\varepsilon_{ik}=\varepsilon_{ki}$, 而(90.10)式可以写为

$$(K_i^{(1)}K_k^{(2)})_\omega = 2\hbar\varepsilon''_{ik}\delta(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)\,\mathrm{cth}\frac{\hbar\omega}{2T}. \qquad (90.11)$$

由完全类似的方式, 我們得到公式

$$(L_i^{(1)}L_k^{(2)})_\omega = 2\hbar\mu''_{ik}\delta(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)\,\mathrm{cth}\frac{\hbar\omega}{2T}. \qquad (90.12)$$

由此可見, 在物体的不同点处, "外"感应强度的起伏, 只在两点間的距离($\mathbf{r}_2\to\mathbf{r}_1$)等于零的极限下才是互相关联的。当然, 这极限必須从宏观的意义上去理解。上述的論断表明, 实际上这些量的关联只能扩展到原子距离。我們要着重指出一种重要的情况: "外"感应强度的关联公式並不依賴于研究起伏的物体的几何形状, 在这种意义上, 它們是普遍有效的。

在相当低的頻率区域内("准稳定态区域"),(90.11)和(90.12)式还可以写成另一种形式, 这时張量 ε_{ik} 可用恒定的(不依賴于頻率)电导率張量 σ_{ik} 来表示:

$$\varepsilon_{ik} = \frac{4\pi i\sigma_{ik}}{\omega}. \qquad (90.13)$$

在这种情况下, 代替 $\mathbf{K}$, 我們引进一个新量 $\mathbf{j}$: $\mathbf{j}=\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\mathbf{K}}{\partial t}$ 或

$$\mathbf{j}_\omega = -\frac{i\omega}{4\pi}\mathbf{K}_\omega. \qquad (90.14)$$

这个量的意义可以从(90.4)式所取的形式看出:

$$(\mathrm{rot}\,\mathbf{H}_\omega)_i = \frac{4\pi}{c}(\sigma_{ik}E_{k\omega}+j_{i\omega}). \qquad (90.15)$$

由此看到，电流密度的总起伏为 $\sigma_{ik}E_k+j_i$，于是矢量 j 代表电流中与电場 E 无关的"外"部分。对于满足(90.13)式的频率和不太低的溫度，我們有 $kT\gg\hbar\omega$，于是 $\operatorname{cth}\left(\frac{\hbar\omega}{2T}\right)\approx\frac{2T}{\hbar\omega}$。結果(90.11)式变为

$$(j_i^{(1)}j_k^{(2)})_\omega=\frac{T}{\pi}\sigma_{ik}\delta(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1). \qquad (90.16)$$

公式(90.16)由 M. A. 列昂托維奇和 C. M. 雷托夫用另一种方法导出(1952)，而(90.11)和(90.12)式是由 C. M. 雷托夫导出的(1953)。这些公式和(90.3)与(90.4)式一起，在原則上可以解决計算任何物体內电磁起伏的問題。問題的求解过程如下。把 $\mathbf{K}_\omega$ 和 $\mathbf{L}_\omega$ 看作坐标的已知函数，然后对 $\mathbf{E}_\omega$ 和 $\mathbf{H}_\omega$ 求出(90.3)和(90.4)式的解，同时考虑到在物体表面上 $\mathbf{E}_\omega$ 和 $\mathbf{H}_\omega$ 的切向分量为連續的必要边界条件(在物体外，当然 $\mathbf{K}=\mathbf{L}=0$，但 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{H}$ 不为零)。結果我們得到 $\mathbf{E}_\omega$ 和 $\mathbf{H}_\omega$ 表示为 $\mathbf{K}_\omega$ 和 $\mathbf{L}_\omega$ 的綫性泛函数的形式。相应地，$\mathbf{E}_\omega$ 和 $\mathbf{H}_\omega$ 的任何二次量(或双綫性量)可以用 $\mathbf{K}_\omega$ 和 $\mathbf{L}_\omega$ 的二次泛函数来表示，然后，利用(90.11)和(90.12)式，可以算出它們的平均值，于是 $\mathbf{K}_\omega$ 和 $\mathbf{L}_\omega$ 从最后的結果中被消去。

作为一个例子，我們来研究无限的各向同性媒质內的电磁起伏(C. M. 雷托夫，1953)，我們假定媒质的导磁率等于 1，于是，$\mu''=0$，同时必須令 $\mathbf{L}=0$。这样一来，(90.3)和(90.4)式变成

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}_\omega=i\frac{\omega}{c}\mathbf{H}_\omega,$$
$$\operatorname{rot}\mathbf{H}_\omega=-i\frac{\omega}{c}(\varepsilon\mathbf{E}_\omega+\mathbf{K}_\omega), \qquad (90.17)$$

而且

$$(K_i^{(1)}K_k^{(2)})=2\hbar\varepsilon''\delta_{ik}\delta(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)\operatorname{cth}\frac{\hbar\omega}{2T}. \qquad (90.18)$$

把 $\mathbf{K}_\omega$ 写成傅立叶空間积分:

$$\mathbf{K}_\omega(\mathbf{r})=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathbf{g}(\mathbf{p})e^{i\mathbf{pr}}\,d^3p. \tag{90. 19}$$

这时

$$\mathbf{g}_\omega(\mathbf{p})=\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathbf{K}_\omega(\mathbf{r})e^{-i\mathbf{pr}}\,d^3r,\quad g^*_\omega(\mathbf{p})=\mathbf{g}_{-\omega}(-\mathbf{p}).$$

我們来求出分量 $\mathbf{g}_\omega(\mathbf{p})$ 的关联函数。为此，我們把它們的乘积写成重积分形式:

$$g_{i\omega}(\mathbf{p})g_{k\omega'}(\mathbf{p}')=\frac{1}{(2\pi)^6}\iint_{-\infty}^{+\infty}K_{i\omega}(\mathbf{r}_1)K_{k\omega'}(\mathbf{r}_2)\times$$
$$\times e^{-i(\mathbf{pr}_1+\mathbf{p}'\mathbf{r}_2)}d^3r_1d^3r_2.$$

按下式求平均:

$$\overline{K_{i\omega}(\mathbf{r}_1)K_{k\omega'}(\mathbf{r}_2)}=(K_i^{(1)}K_k^{(2)})_\omega\delta(\omega+\omega'),$$

并将(90. 18)式代入和积分一次(对 d^3r_1 或 d^3r_2)，由于被积式內出現因子 $\delta(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)$，于是我們得到

$$\overline{g_{i\omega}(\mathbf{p})g_{k\omega'}(\mathbf{p}')}=2h\varepsilon''\delta(\omega+\omega')\delta_{ik}\times$$
$$\times\operatorname{cth}\frac{h\omega}{2T}\,\frac{1}{(2\pi)^6}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-i(\mathbf{p}+\mathbf{p}')\mathbf{r}}\,d^3r,$$

或者最后

$$\overline{g_{i\omega}(\mathbf{p})g_{k\omega'}(\mathbf{p}')}=\frac{h}{4\pi^3}\varepsilon''\delta_{ik}\delta(\omega+\omega')\delta(\mathbf{p}+\mathbf{p}')\times$$
$$\times\operatorname{cth}\frac{h\omega}{2T}. \tag{90. 20}$$

我們現在用傅立叶方法求出 (90. 17) 式的解。除了把 $\mathbf{K}_\omega$ 写成(90. 19)的积分形式外，我們假設

$$\mathbf{E}_\omega=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathbf{a}(\mathbf{p})e^{i\mathbf{pr}}\,d^3p,\quad \mathbf{H}_\omega=\frac{1}{k}\int_{-\infty}^{+\infty}[\mathbf{pa}]e^{i\mathbf{pr}}\,d^3p.$$

于是(90. 17)式的第一式被滿足，而代入第二式內給出

$$[\mathbf{p}[\mathbf{pa}]]=-k^2(\varepsilon\mathbf{a}+\mathbf{g}),$$

由此得

$$\mathbf{a}=\frac{k^2\varepsilon\mathbf{g}-\mathbf{p}(\mathbf{pg})}{\varepsilon(p^2-\varepsilon k^2)}.$$

利用上式和(90. 20)式,我們得到电場的傅立叶分量的关联公式如下:

$$\overline{a_{i\omega}(\mathbf{p})a_{k\omega'}(\mathbf{p}')}=$$
$$=\frac{h\varepsilon''}{4\pi^3|\varepsilon|^2}\delta(\mathbf{p}+\mathbf{p}')\delta(\omega+\omega')\operatorname{cth}\frac{h\omega}{2T}\times$$
$$\times\frac{k^4|\varepsilon|^2\delta_{ik}-p_ip_k[k^2(\varepsilon+\varepsilon^*)-p^2]}{|p^2-k^2\varepsilon|^2} \qquad (90.21)$$

最后,由傅立叶逆变换,我們得到电場起伏的空間关联为

$$\overline{E_{i\omega}(\mathbf{r}_1)E^*_{k\omega'}(\mathbf{r}_2)}=$$
$$=\iint\limits_{-\infty}^{+\infty}\overline{a_{i\omega}(\mathbf{p})a_{k\omega'}(\mathbf{p}')}e^{i(\mathbf{pr}_1+\mathbf{p}'\mathbf{r}_2)}\,d^3p\,d^3p'.$$

由于(90. 21)式内存在 δ 函数,可以立即积分一次。为了进行第二次积分,必須把(90. 21)式展开为簡分数,然后利用公式:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i\mathbf{pr}}}{p^2+\kappa^2}d^3p=2\pi^2\frac{e^{-\kappa r}}{r},$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{p_ip_ke^{i\mathbf{pr}}}{p^2+\kappa^2}d^3p=-2\pi\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_k}\left(\frac{e^{-\kappa r}}{r}\right);$$

从已知关系式

$$(\Delta-\kappa^2)\frac{e^{-\kappa r}}{r}=-4\pi\delta(\mathbf{r}) \qquad (90.22)$$

的两侧取傅立叶分量, 我們得到其中第一式子, 再对第一式求微分,即得到第二个式子。

于是我們得到

$$(E_i^{(1)}E_k^{(2)})_\omega=\frac{h}{4\pi i}\operatorname{cth}\frac{h\omega}{2T}\left\{\frac{k^2}{r}\left(e^{-k\sqrt{-\varepsilon}r}-e^{-k\sqrt{-\varepsilon^*}r}\right)\delta_{ik}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{|\varepsilon|^2}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_k}\left[\frac{1}{r}\left(\varepsilon^* e^{-k\sqrt{-\varepsilon}r}-\varepsilon e^{-k\sqrt{-\varepsilon^*}r}\right)\right]\right\},\tag{90.23}$$

式中 $r=|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1|$，而取根号$\sqrt{-\varepsilon}$的正負号时必須使 $\mathrm{Re}\sqrt{-\varepsilon}>>0$。特别是对下角标 i 和 k 进行簡化，并利用关系式(90.22)，我們得到

$$(\mathbf{E}^{(1)}\mathbf{E}^{(2)})_\omega=\frac{h}{4\pi i}\operatorname{cth}\frac{h\omega}{2T}\left\{\frac{2k^2}{r}\left(e^{-k\sqrt{-\varepsilon}r}-e^{-k\sqrt{-\varepsilon^*}r}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{8\pi i\varepsilon''}{|\varepsilon|^2}\delta(\mathbf{r})\right\}.\tag{90.24}$$

由类似方式，可以算出 $\mathbf{H}_\omega$ 的不同分量之間的关联以及与 $\mathbf{E}_\omega$ 的分量之間的关联，但我們在这里不去研究它們。

§ 91. 透明媒质內的黑体輻射

在(90.11)和(90.12)式內出現的因子 ε'' 和 μ''，十分明显地着重指出了电磁起伏与媒质吸收之間的关系。但是如果在(90.23)或(90.24)式內过渡到极限 $\varepsilon''\to 0$（同时假定 $\varepsilon'>0$），我們就得到不为零的有限表达式。这种情况与过渡到两种极限——媒质无限大和 ε'' 等于零——的次序有关。因为在无限大媒质內，无論 ε'' 如何小，都会引起吸收，因而在我們所采用的过渡到极限的次序下，所得到的結果是指物理上透明的媒质而言，在这种媒质內，和在任何实际媒质內一样，总是存在着不为零的吸收。

例如，我們来求(90.24)式的极限形式。为此我們注意到，当 ε'' 很小时，

$$\sqrt{-\varepsilon}=\sqrt{-\varepsilon'-i\varepsilon''}\approx -i\sqrt{\varepsilon'}\left(1+i\frac{\varepsilon''}{2\varepsilon'}\right),$$

$$\sqrt{-\varepsilon^*}=\sqrt{-\varepsilon'+i\varepsilon''}\approx -i\sqrt{\varepsilon'}\left(1-i\frac{\varepsilon''}{2\varepsilon'}\right);$$

两式内的正負号选擇取决于它們的实数部分为正的条件。因此在 $\varepsilon''\to 0$ 的极限下，我們得到

$$(\mathbf{E}^{(1)}\mathbf{E}^{(2)})_\omega=\frac{\omega^2 h}{\pi c^2}\frac{\sin\left(\frac{\omega}{c}nr\right)}{r}\operatorname{cth}\frac{h\omega}{2T},$$

式中 $n=\sqrt{\varepsilon}$ 为折射率。由于不存在含 δ 函数的項，因而当 $\mathbf{r}_1=\mathbf{r}_2$ 时，这式子也仍是有限的：

$$(\mathbf{E}^2)_\omega=\frac{\omega^3 h}{\pi c^3}n\operatorname{cth}\frac{h\omega}{2T}. \tag{91.1}$$

媒质单位体积内电場能的譜密度由下式給出[参閱(61.10)和(87.6)式]：

$$\frac{1}{8\pi}2(\mathbf{E}^2)_\omega\frac{d(n^2\omega)}{d\omega}.$$

将(91.1)式代入，我們得到

$$\frac{\omega^3 hn}{4\pi^2c^3}\frac{d(n^2\omega)}{d\omega}\operatorname{cth}\frac{h\omega}{2T}.$$

由类似方式，可以算出磁場的均方值。这时得到 $(\mathbf{H}^2)_\omega=\varepsilon(\mathbf{E}^2)_\omega$，因而磁場能为

$$\frac{1}{8\pi}2(\mathbf{H}^2)_\omega=\frac{\omega^3hn^3}{4\pi^2c^3}\operatorname{cth}\frac{h\omega}{2T},$$

我們在这里不去进行相应的計算，因为下面所得到的最后結果是非常明显的。

这样一来，起伏場的电磁能量的总譜密度等于

$$\frac{\omega^3 h}{4\pi^2c^3}\left(n\frac{d(n^2\omega)}{d\omega}+n^3\right)\operatorname{cth}\frac{h\omega}{2T}=$$

$$=\left(\frac{h\omega}{2}+\frac{h\omega}{e^{\frac{h\omega}{kT}}-1}\right)\frac{\omega^2n^2}{\pi^2c^3}\frac{d}{d\omega}(n\omega).$$

括号內的第一項与場的零振动有关。第二項給出透明媒质內热力学平衡下的电磁輻射能量(即所謂黑体輻射能量):

$$\frac{\hbar\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}}-1}\frac{\omega^2 n^2}{\pi^2 c^3}\frac{d}{d\omega}(n\omega). \tag{91.2}$$

不考慮起伏現象,由适当推广眞空內黑体輻射的普朗克公式,也能得到(91.2)式。按照普朗克公式,单位体积內波矢量分量在 dk_x, dk_y, dk_z 間隔內的黑体輻射能由下式給出:

$$\frac{\hbar\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}}-1}\frac{2dk_x dk_y dk_z}{(2\pi)^3}$$

(因子 2 是考慮到偏振有两个方向)。与此相应,要得到能量的譜密度,必須用 $4\pi k^2 dk$ 代替 $dk_x dk_y dk_z$,并且代入 $k=\omega/c$。从眞空过渡到透明媒质,只要令 $k=n\omega/c$ 以代替 $k=\omega/c$,也即是只要写为

$$k^2 dk = k^2\frac{dk}{d\omega}d\omega = \frac{\omega^2 n^2}{c^3}\frac{d(n\omega)}{d\omega},$$

由这个式子可得出(91.2)式。我們注意到,后者当 $\mu\neq 1$ 时也仍然适用,只要把 n 理解为 $\sqrt{\varepsilon\mu}$。

§ 92. 固体間的分子吸力

电磁起伏理論可以用来計算表面分开很小距离的任何两个宏观物体之間的相互作用力(E, M, 李夫希茨, 1954)。下面我們只是假定两个表面分开的距离大于原子間距;这一条件可以使我們从純粹宏观的观点来处理所研究的問題。

也即是我們可以把物体間的相互作用看成是由經常存在于吸收媒质內及其外部的电磁場的起伏所引起的。如果物体表面間的空間为眞空,則这种相互作用傳送的机构明显地是唯一的。

我們設想相互作用的物体为充滿两个具有平行平面边界的半

空間的两种媒质，两个半空間相距 l。在两种媒质內以及它們之間的空間內的电磁場起伏，可以根据两表面的相应边界条件（$\mathbf{E}_\omega$ 和 $\mathbf{H}_\omega$ 的切向分量連續）由解(90.17)式而得到①。最为方便的求解法是将所求的函数（和量 $\mathbf{K}_\omega$）展开为横坐标 y, z 的傅立叶积分（x 軸垂直于空隙平面），然后为确定場对 x 的关系，我們得到一組非齐次的綫性常微分方程。在解出这些方程以后，我們就得到 $\mathbf{E}_\omega$ 和 $\mathbf{H}_\omega$ 的积分表达式，它們的被积式內包含两种媒质內的"外"起伏場 $\mathbf{K}_{1\omega}$ 和 $\mathbf{K}_{2\omega}$。实际上，只需要得到两媒质間的空間內的場 $\mathbf{E}_\omega$ 和 $\mathbf{H}_\omega$ 的明显形式就够了，因为从这場可以算出相互吸力 F_ω（作用于每一物体单位表面上）为麦克斯韦应力張量的 xx 分量，这分量利用(90.18)式求統計平均值。因为这时全部計算都是对場的各个譜分量进行的，因而要求出总的吸力 F，还必須将 F_ω 对所有頻率进行积分②。

但是这种計算是非常复杂的，我們在这里不去叙述它們，只是引进最后得到的力 F 的公式③：

$$F=\frac{h}{2\pi^2c^3}\operatorname{Re}\iint_0^\infty p^2\omega^3\operatorname{cth}\frac{h\omega}{2T}\left\{\left[\frac{(s_1+p)(s_2+p)}{(s_1-p)(s_2-p)}e^{-\frac{2ip\omega l}{c}}-1\right]^{-1}+\right.$$
$$\left.+\left[\frac{(s_1+\varepsilon_1 p)(s_2+\varepsilon_2 p)}{(s_1-\varepsilon_1 p)(s_2-\varepsilon_2 p)}e^{-\frac{2ip\omega l}{c}}-1\right]^{-1}\right\}dp\,d\omega, \qquad (92.1)$$

式中 $\varepsilon_1(\omega)$ 和 $\varepsilon_2(\omega)$ 为两物体的介电常数，而且

$$s_1=\sqrt{\varepsilon_1(\omega)-1+p^2}, \qquad s_2=\sqrt{\varepsilon_2(\omega)-1+p^2}, \qquad (92.2)$$

取根的正負号时必須使 s 的虛数部分为正值④。积分路綫如图 44a

---

① 两种物体的磁导率假定等于 1。

② 由計算得到的 F_ω 包含对 $d\omega$ 积分时发散的項。但是这发散項并不依賴于距离 l，并且它代表眞空內的黑体輻射对物体表面的压强。在实际条件下，物体各面所受的力相互抵銷，因此上述的項与我們所感兴趣的相互吸力无关，因而必須略去。

③ 参閱 E. M. 栗弗席茲，ЖЭТФ, 29, 94, 1955。

④ 因为根号下的式子(ε'')的虛数部分是正的，因而当 $\operatorname{Im} s>0$ 时也使 $\operatorname{Re} s>0$。

所示；对 $d\omega$ 的积分为对从 0 到 ∞ 的全部实数值进行，而对 dp 的积分为对沿实軸从 1 到 0, 然后对从 0 到 $i\infty$ 的全部虚数值进行。

如果物体的溫度可以假定等于零(見下面)，則(92.1)式內的 $\mathrm{cth}(\hbar\omega/2T)$ 可以用 1 代替。我們首先就来研究在这种情况下的(92.1)式。

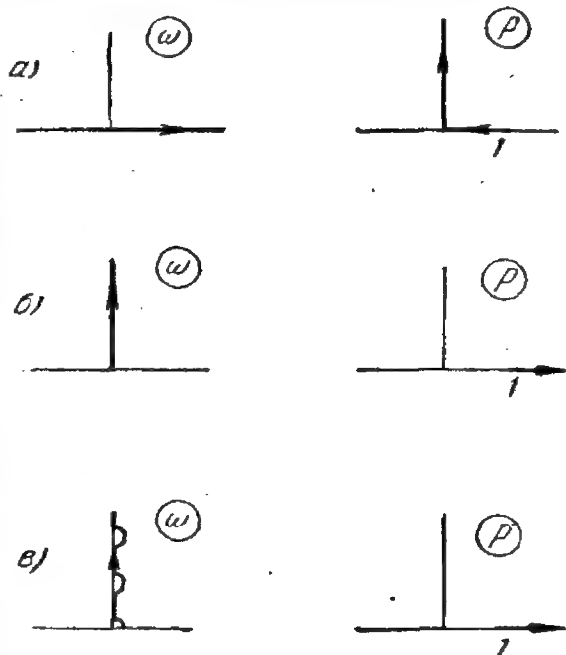


图 44

(92.1)式不便于应用，一則由于它是复数形式，二則由于它的被积式內包含有振蕩因子 $e^{-2ip\omega l/c}$ (在对 dp 的积分路綫的实数部分发生振蕩)。后一种情况当 l 为很大值时（这时振蕩变得非常之快）使积分的計算尤其困难。但在复变数 ω 和 p 的平面內相应地改变积分的路綫，我們可以消除这一困难。也即是可以同时这样来移动这些积分路綫，使对 dp 的积分只对实数值进行，而对 $d\omega$ 的积分只对虛数值进行（图 44б）；于是 $e^{-2ip\omega l/c}$ 內的指数将总是为实数①。

結果我們得到相互作用力的表达式为($T=0$ 时)

$$F=\frac{\hbar}{2\pi^2c^3}\int_0^\infty\int_1^\infty p^2\xi^3\left\{\left[\frac{(s_1+p)(s_2+p)}{(s_1-p)(s_2-p)}e^{\frac{2p\xi l}{c}}-1\right]^{-1}+\right.$$

$$\left.+\left[\frac{(s_1+\varepsilon_1p)(s_2+\varepsilon_2p)}{(s_1-\varepsilon_1p)(s_2-\varepsilon_2p)}e^{\frac{2p\xi l}{c}}-1\right]^{-1}\right\}dp\,d\xi. \qquad (92.3)$$

①容許这种变换的条件是存在着同时移动两条路綫的方法，以使被积式永远都不会通过极点。根据函数 $\varepsilon(\omega)$ 的普遍性质(見 § 62)所作的光譜研究，証明了这种方法的存在。

在这里我們引用了符号 $\omega=i\xi$ 来示 ω 的虛数值，而 ε_1 和 ε_2 必須理解为实函数 $\varepsilon_1(i\xi)$ 和 $\varepsilon_2(i\xi)$。符号 Re 已被略去，因为上面写出的式子显然为实数。由(92.3)式，原則上可以算出 l 为任何距离时的力 F，只要对两种物体知道了函数 $\varepsilon(i\xi)$。当 ω 为实数时，按照(62.17)式，函数 $\varepsilon(i\xi)$ 可以用函数 $\varepsilon(\omega)$ 的虛数部分的值来表示。这样一来，可以說，当物体的函数 $\varepsilon''(\omega)$ 被給定后，物体的相互作用力的定律就被完全确定了。

我們現在来研究距离 l 小于物体吸收光譜內主要波长 λ_0 的极限情况。凝聚物体內的溫度在任何情况下都小于这里起主要作用的数值 $h\omega\sim h\omega_0$（式中 $\omega_0\sim 2\pi c/\lambda_0$）。因此，可以假定 $T=0$，并且相应地可以利用(92.3)式。

由于在被积式的分母內有指数式递增因子 $e^{2pl\xi/c}$，因此在对 dp 积分时起主要作用的是使 $pl\xi/c\sim 1$ 的 p 值。这时 $p\gg 1$，因而求主要項时可以令 $s_1\approx s_2\approx p$。在这种近似下，(92.3)式方括号內的第一項变为零。第二項在引进积分变数 $x=2pl\xi/c$ 后給出

$$F=\frac{h}{16\pi^2 l^3}\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{x^2\,dx\,d\xi}{\left(\frac{\varepsilon_1+1}{\varepsilon_1-1}\right)\left(\frac{\varepsilon_2+1}{\varepsilon_2-1}\right)e^x-1},\qquad(92.4)$$

在这种近似下，对 dx 的积分下限 $2l\xi/c$ 可用零代替。

公式(92.4)給出 l 很小的极限情况下的吸力。这力与距离的三次方成反比。函数 $\varepsilon(i\xi)-1$ 随 ξ 的增加而单調地减小，最后趋近于零。因此 ξ 的值在超过某一值 ξ_0 后不再对积分作出主要貢献；l 小的条件表明：必須 $l\ll c/\xi_0$。

現在我們来证明，在(92.4)式內怎样过渡到单个原子相互作用的极限情形。为此我們形式地假定两种媒质非常稀疏。于是差值 ε_1-1 和 ε_2-1 接近于零，而且从(92.4)式，相当精确地我們有

$$F=\frac{h}{64\pi^2 l^3}\int_0^\infty\int_0^\infty x^2 e^{-x}(\varepsilon_1-1)(\varepsilon_2-1)\,dx\,d\xi=$$

$$=\frac{h}{32\pi^2 l^3}\int_0^\infty[\varepsilon_1(i\xi)-1][\varepsilon_2(i\xi)-1]d\xi.$$

按照(62.17)式，将 $\varepsilon(i\xi)$ 用实軸上的 $\varepsilon''(\omega)$ 值来表示，我們得到

$$\int_0^\infty[\varepsilon_1(i\xi)-1][\varepsilon_2(i\xi)-1]=$$

$$=\frac{4}{\pi^2}\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{\omega_1\omega_2\varepsilon_1''(\omega_1)\varepsilon_2''(\omega_2)}{(\omega_1^2+\xi^2)(\omega_2^2+\xi^2)}d\xi\,d\omega_1\,d\omega_2=$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{\varepsilon_1''(\omega_1)\varepsilon_2''(\omega_2)}{\omega_1+\omega_2}d\omega_1\,d\omega_2,$$

并且求得力 F 为

$$F=\frac{h}{16\pi^3 l^3}\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{\varepsilon_1''(\omega_1)\varepsilon_2''(\omega_2)}{\omega_1+\omega_2}d\omega_1\,d\omega_2. \tag{92.5}$$

另一方面，稀疏媒质間的相互作用力可以看成是各分子对之間发生相互作用的結果。于是(92.5)的力就相应于分子与依賴于分子間距离 R 的能量之間的相互作用，这能量为

$$U=-\frac{3h}{8\pi^4 R^6 N^2}\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{\varepsilon_1''(\omega_1)\varepsilon_2''(\omega_2)}{\omega_1+\omega_2}d\omega_1\,d\omega_2, \tag{92.6}$$

式中 N 为单位体积内的分子数。从(92.6)式对分开寬度为 l 的两个半空間进行积分，然后再将总能量对距离 l 求微分，我們就得到了(92.5)式。(92.6)式和 F. 倫敦应用通常的量子力学微扰理論到两个原子的偶极子相互作用上所得到的熟知公式相同。在比較时必須考虑到 $\varepsilon''(\omega)$ 和"振子力"的譜密度 $f(\omega)$ 之間的关系为(62.13)式。振子力通常可用原子偶极矩的矩陣元的平方来表示。

于是我們看到，微观公式可以从宏观理論推导出来。

我們現在来研究距离 l 大于物体吸收光譜內主要波长的相反的极限情况($l \gg \lambda_0$)。在这里我們首先假定溫度等于零。

在普遍公式(92.3)內，再引进新的积分变数 $x=2pl\xi/c$，但代替 ξ 保留 p 作为第二个变数，于是

$$F=\frac{hc}{32\pi^2 l^4}\int_0^\infty\int_1^\infty \frac{x^3}{p^2}\left\{\left[\frac{(s_1+p)(s_2+p)}{(s_1-p)(s_2-p)}e^x-1\right]^{-1}+\right.$$

$$\left.+\left[\frac{(s_1+\varepsilon_1 p)(s_2+\varepsilon_2 p)}{(s_1-\varepsilon_1 p)(s_2-\varepsilon_2 p)}e^x-1\right]^{-1}\right\}dp\,dx,$$

$$\varepsilon=\varepsilon\left(i\frac{xc}{2pl}\right),\quad s=\sqrt{\varepsilon\left(i\frac{xc}{2pl}\right)-1+p^2}.$$

由于分母內有 e^x，因而在 dx 間隔內起主要作用的值为 $x\sim 1$，又因为 $p\geqslant 1$，因而当 l 很大时，在变数值的重要区域內，函数 ε 的宗量接近于零。由于此，ε_1 和 ε_2 可以用它們在 $\omega=0$ 时的值来代替，也即是用静电介电常数来代替，我們把它們表示为 ε_{10} 和 ε_{20}。在金屬內，当 $\omega\to 0$ 时函数 $\varepsilon(\omega)$ 趋近于无穷大；因此对于它們，必須假定 $\varepsilon_0=\infty$。

这样一来，我們最后得到下列結果：

$$F=\frac{hc}{32\pi^2 l^4}\int_0^\infty\int_1^\infty \frac{x^3}{p^2}\left\{\left[\frac{(s_{10}+p)(s_{20}+p)}{(s_{10}-p)(s_{20}-p)}e^x-1\right]^{-1}+\right.$$

$$\left.+\left[\frac{(s_{10}+\varepsilon_{10} p)(s_{20}+\varepsilon_{20} p)}{(s_{10}-\varepsilon_{10} p)(s_{20}-\varepsilon_{20} p)}e^x-1\right]^{-1}\right\}dp\,dx,\quad (92.7)$$

$$s_{10}=\sqrt{\varepsilon_{10}-1+p^2},\qquad s_{20}=\sqrt{\varepsilon_{20}-1+p^2}.$$

此处吸力与 l^4 成反比。值得注意的是，在这种极限情况下，吸力只依賴于两种媒质的静电介电常数。

我們来研究某些特殊情况。当两种媒质为金屬时，我們得到特別簡单的結果。在(92.7)式內令 $\varepsilon_{10}=\varepsilon_{20}=\infty$，我們得到

$$F=\frac{h c}{16\pi^2 l^4}\int_0^\infty\int_1^\infty\frac{x^3\,dp\,dx}{p^2(e^x-1)}=\frac{hc}{l^4}\frac{\pi^2}{240}, \qquad (92.8)$$

这力一般和金屬的种类无关(当距离很小时，这一性质不存在，这时相互作用力依賴于函数 $\varepsilon(i\xi)$ 不只当 $\xi=0$ 时，而且对 ξ 的所有值都是如此)①。

对于两种相同的电介质($\varepsilon_{10}=\varepsilon_{20}=\varepsilon_0$)，由对(92.7)式进行数值积分，得到結果为

$$F=\frac{hc}{l^4}\frac{\pi^2}{240}\left(\frac{\varepsilon_0-1}{\varepsilon_0+1}\right)^2\varphi(\varepsilon_0), \qquad (92.9)$$

式中 $\varphi(\varepsilon_0)$ 为一函数，其数值如图 45 内的图綫所示。

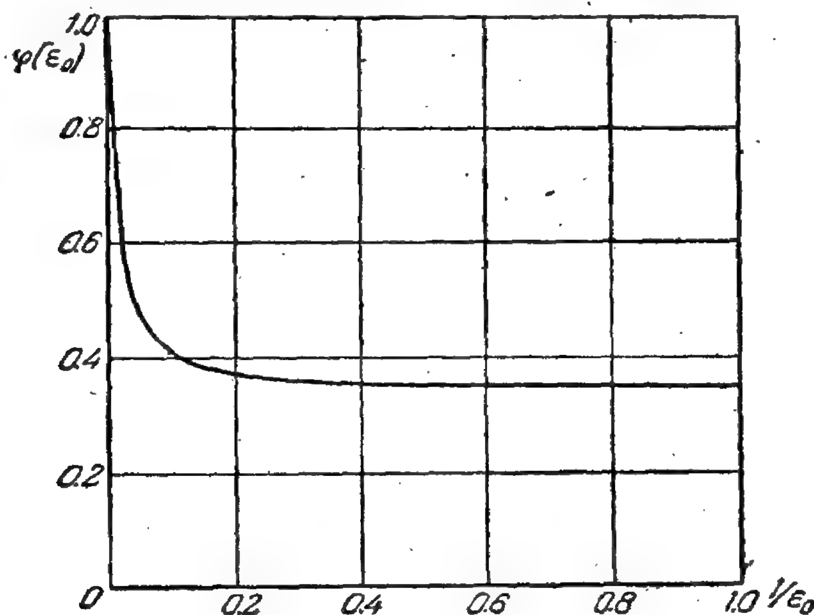


图 45

最后，在(92.7)內过渡到单个分子相互作用的情况。为此和上面一样，我們假定两种媒质相当稀疏，也即是差值 $\varepsilon_{10}-1$ 和 $\varepsilon_{20}-1$ 很小。对于(92.7)式的被积式展开为这些差值的冪級数，只保留不为零的第一项，我們得到

① 公式(92.8)以前曾由卡西米尔(Casimir, 1984)用另一种方法导出。

$$F=\frac{hc}{32\pi^2 l^4}\int_0^\infty x^3 e^{-x}dx\int_1^\infty \frac{1-2p^2+2p^4}{8p^6}dp(\varepsilon_{10}-1)(\varepsilon_{20}-1),$$

或者

$$F=\frac{hc}{l^4}\frac{23}{640\pi^2}(\varepsilon_{10}-1)(\varepsilon_{20}-1). \qquad (92.10)$$

这力相当于分子与能量

$$U=-\frac{23hc}{64\pi^3 R^7}\frac{(\varepsilon_{10}-1)(\varepsilon_{20}-1)}{N^2}=-\frac{23hc}{4\pi R^7}\alpha_1\alpha_2 \qquad (92.11)$$

的相互作用，式中 α_1 和 α_2 为两个分子的静电极化率。这个公式和卡西米尔与波耳德(Polder)(1948)利用量子力学方法計算两个分开很大距离的分子之間的吸力所得到的結果相同，这时相互作用的迟延效应变成重要。

为了得到計及溫度影响的公式，我們回到起始公式(92.1)，并且看一看，当 $T=0$ 时导至(92.3)式的变换，当 $T\neq 0$ 时应如何修正。函数 $\operatorname{cth}(\hbar\omega/2T)$ 在虚軸上有无限多的极点，并且等于

$$\omega_n=i\xi_n=i\frac{2\pi T}{\hbar}n, \qquad (92.12)$$

式中 n 为整数。因此，当把对 $d\omega$ 的积分路綫移到虚軸上时，必須沿半圓繞过这些极点，除极点 $\omega=0$ 外，$\omega=0$ 的极点可以沿四分之一的圓来繞过（图 44б）。但是这样的繞过就会对积分的实数部分作出貢献，这貢献等于被积式相对于极点的留数乘上 πi（对极点 $n=0$，乘上 $\frac{\pi}{2}i$）。对虚軸在极点間的部分进行积分給出純虚数值，在取实数值时消去。

这样一来，我們得到下面的公式：

$$F=\frac{T}{\pi c^3}\sum_{n=0}^{\infty}{}' \xi_n^3\int_1^\infty p^2\left\{\left[\frac{(s_{1n}+p)(s_{2n}+p)}{(s_{1n}-p)(s_{2n}-p)}e^{2p\xi_n l/c}-1\right]^{-1}+\right.$$

$$+\left[\frac{(s_{1n}+\varepsilon_{1n}p)(s_{2n}+\varepsilon_{2n}p)}{(s_{1n}-\varepsilon_{1n}p)(s_{2n}-\varepsilon_{2n}p)}e^{2p\xi_n l/c}-1\right]^{-1}\Big\}dp, \quad (92.13)$$

$$s_n=\sqrt{\varepsilon_n-1+p^2}, \quad \varepsilon_n=\varepsilon(i\xi_n),$$

果加符号上带撇表示，$n=0$ 的項必須取半值。当 $T\to 0$ 时，极点間的距离也趋近于零，因而对 n 的求和可以用对 $d\xi$ 的积分来代替，于是重新得到不包含 T 的(92.3)式。

虽然在距离很小的极限情况下，求相互作用力时实际上常常可以假定物体的溫度等于零，但在大距离时，溫度的影响可以变得很重要。对距离 l 时的特征溫度为 hc/l，容許假定 $T=0$ 的条件，粗糙地說来为 $lT/hc\ll 1$。当溫度相当低时，这条件当然和条件 $l\gg\lambda_0$ 是相容的。但在高溫时这两个条件可以互相矛盾，于是(92.7)的极限定律的应用区域实际上已不存在。

我們現在来研究距离 l 很大、使 $lT/hc\gg 1$ 的极限情况。于是从 (92.13) 式总和的各項內只須保留第一項。但是由于这时所引起的不确定性(因子 ξ_n^3 变为零，而对 p 的积分为发散的)，因而不能在 (92.13) 式內立即令 $n=0$。但如果先引进新积分变数 $x=2p\xi_n l/c$ 以代替 p (結果因子 ξ_n^3 被消去)，我們就可以繞过这一困难。然后令 $n=0$，我們得到

$$F=\frac{T}{16\pi l^3}\int_0^\infty x^2\left[\frac{(\varepsilon_{10}+1)(\varepsilon_{20}+1)}{(\varepsilon_{10}-1)(\varepsilon_{20}-1)}e^x-1\right]^{-1}dx. \quad (92.14)$$

由此可見，在距离很大时，相互作用力的衰减变慢，重新回到定律 $1/l^3$，其系数依賴于溫度和介电常数的静电值。当 lT/hc 大时，(92.13)式总和內以下的各項指数式地衰减。

第十四章　电磁波的散射

§93. 各向同性媒质內散射的普遍理論

上面第九章至第十一章所介紹的电磁波在透明媒质內的傳播理論，完全沒有考虑比較弱的但在原理上却是非常重要的散射現象。这种現象的实质是产生一种弱强度的散射波，其頻率和傳播方向都和原来基波的不相同。

散射現象的发生，是由于媒质內的电荷在入射波場的作用下运动改变的結果。这种运动的改变引起发射出一种新的波——散射波。研究散射現象的微观机构必須根据量子力学。但是这种研究对发展下面所介紹的宏观理論幷不需要。因此，我們只限于对散射时引起波頻率改变的过程的特征，作一些扼要的說明。

散射的基本过程是散射系統吸收初始量子 $\hbar\omega$ 以后同时发射出另一个量子 $\hbar\omega'$。被散射量子的頻率 ω' 可以小于也可以大于頻率 ω（这两种情况分别称为斯托克斯散射和反斯托克斯散射）。在第一种情况下，系統吸收能量 $\hbar(\omega-\omega')$，而在第二种情况下，系統放出能量 $\hbar(\omega'-\omega)$，幷且跃迁到能量較低的状态。例如，在最簡单的气体的情况下，散射发生在各个分子上，而且頻率的变化可以是由于分子跃迁到另一能級，也可以是由于整个分子的动能改变的結果。

另一种散射过程是初始量子 $\hbar\omega$ 保持不变，但它引起散射系統发射出两个量子：一个量子是 $\hbar\omega$，頻率和方向都沒有改变，还有一个是被散射量子 $\hbar\omega'$。这时从散射系統取得的能量为 $\hbar(\omega+\omega')$。但是这种过程在通常的条件下，与第一种过程比較，是非常稀少的，

因而在散射現象中实际上不起任何作用[1]。

我們現在来研究宏观的散射理論，首先必須将其中求平均的意义加以精确化。如在 § 90 开头所指出的，在宏观电动力学中，对一个量求平均可以看成包括两步运算：首先固定一个物理无限小体积内的粒子的位置不变对这体积求平均值，然后再将所得到的結果对粒子的运动求平均值。但是在散射理論中，这样求平均从一开始就是不可能的，因为对粒子的运动求平均，会使我們正要研究的現象消失。因此，例如，在散射理論中出現的散射波場的强度和感应强度，必須理解为只是第一部分平均的結果。这样理解的被散射波場的单色分量，在这一节内我們将用 $\mathbf{E}'$, $\mathbf{H}'$, $\mathbf{D}'$, $\mathbf{B}'$ 来表示。

入射波的場用不带撇的字母 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{H}$ 表示。在这一章内，我們假定入射波是頻率为 ω 的单色波。

对被散射波在媒质内的傳播过程，感应强度和电場强度之間的关系式为 $\mathbf{D}'=\varepsilon(\omega')\mathbf{E}'$（假定散射媒质是各向同性的）。但是这种关系式内并不包含散射現象，也即是不包含在入射波的作用下所发生的散射波。要描写散射波，必須在 $\mathbf{D}'$ 的式子內計及小的附加項。在第一近似下，这样的項必須是入射波場的綫性項；这种关系的最普遍形式为

$$D'_i=\varepsilon' E'_i+\alpha_{ik}E_k+\beta_{ik}E^*_k. \tag{93.1}$$

这里 ε' 表示 $\varepsilon(\omega')$，而 α_{ik} 和 β_{ik} 为表征媒质散射性质的張量。在普遍情况下，它們不具有对称性质，而它們的分量为散射波頻率 ω' 和入射波頻率 ω 的函数[2]。

---

[1] 在 § 94 內，我們将看到，受迫輻射效应对 $T\ll\hbar(\omega+\omega')$ 的任何温度都是很小的。但在射頻范圍內，它可能变得很重要。

[2] α 和 β 的張量性质当然不与所假定的媒质的各向同性相矛盾。只有媒质的完全平均的性质才是各向同性的。但与平均性质的局部偏离，其中也包括(93.1)式的附加項，則不一定是各向同性的。

(93.1)式內的最后一項是由受迫輻射过程所引起的散射部分。实际上，(93.1)式右側的各項必須对应于和左側的 $\mathbf{D}'$ 相同的频率 ω'。因为 $\mathbf{E}^*$ 的頻率为 $-\omega$，因而 β_{ik} 的頻率必須为 $\omega+\omega'$，以使乘积 $\beta_{ik}E_k^*$ 的頻率为 ω'。但是 $\omega+\omega'$ 恰巧就是表征受迫輻射过程的頻率。由于上面已指出这种效应很小，因而可以略去(93.1)式內的相应項，在下面我們将写为

$$D_i'=\varepsilon' E_i'+\alpha_{ik}E_k. \tag{93.2}$$

$\mathbf{B}'$ 和 $\mathbf{H}'$ 之間的关系，可用类似的公式来表示。但是我們将忽略媒质的磁性质，这通常对于光的散射現象是完全不重要的，因而我們可以令 $\mathbf{B}'=\mathbf{H}'$。

散射波場的麦克斯韦方程为

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}'=i\frac{\omega'}{c}\mathbf{H}', \quad \operatorname{rot}\mathbf{H}'=-i\frac{\omega'}{c}\mathbf{D}'.$$

从这些方程內消去 $\mathbf{H}'$，我們得到

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E}'=\frac{\omega'^2}{c^2}\mathbf{D}'.$$

根据(93.2)代入

$$\mathbf{E}'=\frac{1}{\varepsilon'}\mathbf{D}'-\frac{1}{\varepsilon'}(\alpha\mathbf{E}),$$

式中 $\alpha\mathbf{E}$ 表示分量为 $\alpha_{ik}E_k$ 的矢量，并考虑到 $\operatorname{div}\mathbf{D}'=0$，于是我們得到 $\mathbf{D}'$ 的表达式为

$$\Delta\mathbf{D}'+k'^2\mathbf{D}'=-\operatorname{rot}\operatorname{rot}(\alpha\mathbf{E}), \tag{93.3}$$

式中 $k'=(\omega/c)\sqrt{\varepsilon'}$ 为散射波的波矢量。

为了精确地表述出求解(93.3)式的条件，我們把散射媒质分成許多小区域(但是每一区域的綫度仍然大于分子的距离)。由于散射过程是分子性质的，因而在媒质(非晶体!)內各点处，这些过程之間的关联一般說来只能扩展至分子距离[①]。所以，从媒质的

① 在§96內将提到的特殊散射情况可能是一个例外。在这些情况下，散射区域的綫度必須假定也大于光的波长。

各个小区域內发出的散射光是非相干的。因而，我們可以这样来研究一个小区域內的散射，仿佛在媒质的其余体积內，光傳播时是沒有散射的。这样，我們就可以計算出离物体散射部分很远处的散射波的場。利用离源很远处的推迟势的熟知近似表达式①，可以立刻写出所求的(93.3)式的解为

$$\mathbf{D}'=\frac{1}{4\pi}\mathrm{rot}\ \mathrm{rot}\frac{e^{ik'R_0}}{R_0}\int(\alpha\mathbf{E})e^{-i\mathbf{k}'\mathbf{r}}dV, \tag{93.4}$$

式中 $\mathbf{R}_0$ 是散射体积（对它进行积分）內某一点至場的观察点的半徑矢量，而矢量 $\mathbf{k}'$ 的方向和 $\mathbf{R}_0$ 相同。上面的积分与观察点的坐标无关。在进行微分后，并且和通常一样，只保留包含 $\frac{1}{R_0}$ 的項，我們得到

$$\mathbf{D}'=-\frac{e^{ik'R_0}}{4\pi R_0}\left[\mathbf{k}'\left[\mathbf{k}'\int(\alpha\mathbf{E})e^{-i\mathbf{k}'\mathbf{r}}dV\right]\right].$$

因为在观察点处，我們把媒质看成是不散射的，因而在这一点处，$\mathbf{D}'$ 和 $\mathbf{E}'$ 間的关系簡单地为 $\mathbf{D}'=\varepsilon'\mathbf{E}'$。在入射波場 $\mathbf{E}$ 內，我們分出空間周期因子，写为

$$\mathbf{E}=\mathbf{E}_0e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}.$$

然后引进符号：

$$\mathbf{G}=\int(\alpha\mathbf{E}_0)e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}}dV, \tag{93.5}$$

式中
$$\mathbf{q}=\mathbf{k}'-\mathbf{k},$$
我們写出

$$\mathbf{E}'=-\frac{e^{ik'R_0}}{4\pi R_0\varepsilon'}[\mathbf{k}'[\mathbf{k}'\mathbf{G}]]. \tag{93.6}$$

矢量 $\mathbf{E}'$ 垂直于散射波的 $\mathbf{k}'$ 方向，并且由矢量 $\mathbf{G}'$ 垂直于 $\mathbf{k}'$ 的投影給出。

我們这样求出了散射波的未平均的場后，現在就可以来研究

① 参閱“場論”第二版，§ 67。

散射光的强度和偏振。为此，必須組成張量:

$$I_{ik}=\overline{E'_i E'^*_k}\,, \tag{93.7}$$

式中横綫表示到此为止尙未进行的最后对物体內粒子的运动求平均。对二項式求平均值当然得到不为零的結果。因为 $\mathbf{E}'\perp\mathbf{k}'$，因而張量 I_{ik} 只在垂直于 $\mathbf{k}'$ 的平面內有不为零的分量；这些分量在該平面內构成二維張量 $I_{\alpha\beta}$(用希腊字母表示的下角标取两个值)，按照定义，張量 $I_{\alpha\beta}$ 是厄密型的：$I_{\alpha\beta}=I^*_{\alpha\beta}$。可以把它化到"主軸"上，而且它的两个主值之比給出消偏振度，而它們的和与光的总强度成比例①。

在乘积 $E'_iE'^*_k$ 內包含积分 G_i 的乘积；也必須对它們求平均。把两个积分的乘积写成重积分形式，我們得到

$$G_iG^*_k=E_{0l}E^*_{0m}\iint\alpha^{(1)}_{il}\alpha^{(2)*}_{km}e^{-i\mathbf{q}(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)}dV_1dV_2, \tag{93.8}$$

右角上的指数(1)和(2)表示，α 的值取在空間的两个不同的点处。

对被积式求平均值时必須考虑到，在物体不同点处的 α 值間的关联，一般說来只能扩展到分子距离。这表明在求平均值以后，被积式只在 $|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1|\sim a$ 时显著地不为零，其中 a 为分子距离的数量級。指数因子內的冪指数为 $\sim a/\lambda$，其中 λ 为散射波长；但是由于应用宏观理論的必要条件，一般必須 $a/\lambda\ll 1$。因此，我們可以用 1 代替指数因子②。

其次，对坐标 $\mathbf{r}_1$ 和 $\mathbf{r}_2$ 的积分，可以用对 $\frac{1}{2}(\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2)$ 和 $\mathbf{r}=\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2$ 的积分来代替。因为被积式只依賴于 $\mathbf{r}$(平均后)，因此，我們得到

---

① 参閱"場論"第二版，§ 50。把厄密張量化到主軸上，这意味着把它表示为 $I_{ik}=\lambda_1 n^{(1)}_i n^{(2)*}_k+\lambda_2 n^{(2)}_i n^{(2)*}_k$，式中 $\mathbf{n}^{(1)}$ 和 $\mathbf{n}^{(2)}$ 在普遍情况下是相互垂直的复数单位矢量：$\mathbf{n}^{(1)}\mathbf{n}^{(1)*}=\mathbf{n}^{(2)}\mathbf{n}^{(2)*}=1$, $\mathbf{n}^{(1)}\mathbf{n}^{(2)*}=0$。厄密張量的主值 λ_1, λ_2 为实数。

② 但是在瑞利散射的情况下，容許这种忽略还要求作进一步的討論(参閱§96)。

$$\overline{G_i G_k^*} = V E_{0l} E_{0m}^* \int \overline{\alpha_{il}^{(1)} \alpha_{km}^{(2)*}} dV, \tag{93.9}$$

式中V为物体散射区域的体积；因而可以預先看出散射必須与V成正比。我們注意到，从(93.9)式以及下面的公式內，完全消去了入射波的波矢量 $\mathbf{k}$ 的方向。

(93.9)式的积分构成一个四秩張量，它只依賴于散射媒质的性质。由于媒质是各向同性的，因而这个張量的最普遍形式为

$$\int \alpha_{il}^{(1)} \alpha_{km}^{(2)*} dV = \frac{a+c}{2} \delta_{il}\delta_{km} + \frac{a-c}{2}\delta_{im}\delta_{kl} + b\delta_{ik}\delta_{lm}, \tag{93.10}$$

式中 a, b, c 为标量常数(更精确地說，为 ω 和 ω' 的函数)。这張量对下角标 i, l 和 k, m 的换位自动地是对称的；但是这种换位等效于变换到复数共軛量(由于点 1 和 2 是等效的)；因而張量(93.10)以及常数 a, b, c 均为实数。

将(93.10)代入(93.9)內，我們得到

$$\overline{G_i G_k^*} = V\left\{\frac{a+c}{2} E_{0i} E_{0k}^* + \frac{a-c}{2} E_{0i}^* E_{0k} + b E_{0l} E_{0l}^* \delta_{ik}\right\}. \tag{93.11}$$

这个式子可以立即写出来，因为它是二秩的厄密型張量的最普遍形式，它对 $\mathbf{E}_0$ 是二次的，并且不包含任何其他特定的方向。当然，这个張量对 $\mathbf{k}'$ 不是"横向"的。将(93.11)式的張量"投影"到垂直于 $\mathbf{k}'$ 的平面內，我們就得到所求的張量 $I_{\alpha\beta}$ 的最普遍形式；为此只要选擇坐标系的一个軸沿 $\mathbf{k}'$ 方向，并且求出張量在其他两个軸上的分量。

我們現在来研究綫偏振波的散射。这种波的場 $\mathbf{E}_0$ 的振幅可以定义为純粹的实数量①。因而散射光的張量 $I_{\alpha\beta}$ 的全部分量也都为实数。这表明散射光是部分偏振的，而且可以分解为两种独立的(非相干的)波，其中每一种波都是綫偏振的。由于張量 $I_{\alpha\beta}$ 依

① 参閱"場論"第二版，§§48, 50。由于得到的公式是非常复杂的，我們在这里不去研究橢圓偏振光的散射。

賴于两个选定的方向($\mathbf{E}_0$ 和 $\mathbf{k}'$)，因而可以預先看出，这些波中的一种波偏振时矢量 $\mathbf{E}'$ 在 $\mathbf{E}_0, \mathbf{k}'$ 平面內，而另一种波偏振时矢量 $\mathbf{E}'$ 垂直于这个平面。散射光的这两个分量的强度我們分别用 I_1 和 I_2 表示；它們分别由張量 $I_{\alpha\beta}$ 的主値給出。

当 $\mathbf{E}_0$ 为实数时，(93.11)式变为

$$\overline{G_i G_k^*} = V\{aE_{0i}E_{0k} + bE_0^2\delta_{ik}\}. \qquad (93.12)$$

首先我們注意到，綫偏振光的散射是由两个而不是由三个独立常数决定。为了求出 I_1 和 I_2，我們把張量 $\mathbf{E}_0$ 投影到上述的两个偏振方向上，在取張量(93.12)的相应分量后，我們得到

$$I_1 \sim a\sin^2\theta + b, \quad I_2 \sim b, \qquad (93.13)$$

比例系数相同；式中 θ 为 $\mathbf{E}_0$ 与散射方向 $\mathbf{k}'$ 間的夹角。我們注意到，电場的极化垂直于 $\mathbf{E}_0$、$\mathbf{k}'$ 平面的散射光分量的强度与散射方向无关。

自然光通过媒质时，散射光是部分偏振的，并且从对称性可知，它的两个非相干的分量是綫偏振的，其电場在 $\mathbf{k}, \mathbf{k}'$ 平面(散射平面)內，并且与它垂直。我們分别用 $I_\parallel$ 和 $I_\perp$ 表示这两个分量的强度。为了求出它們，我們再将(93.11)式对在垂直于 $\mathbf{k}$ 的平面內的矢量 $\mathbf{E}_0$ 的各个方向求平均。乘积 $E_{0i}E_{0k}^*$ 在这样平均后給出

$$\overline{E_{0i}E_{0k}^*} = \frac{1}{2}|\mathbf{E}_0|^2(\delta_{ik} - n_i n_k), \qquad (93.14)$$

$\mathbf{n}$ 为 $\mathbf{k}$ 方向的单位矢量；这是一个二秩的張量，只依賴于 $\mathbf{k}$ 的方向，在降秩时給出 $|\mathbf{E}_0|^2$，并且滿足条件：

$$n_i\overline{E_{0i}E_{0k}^*} = \overline{(n\mathbf{E}_0)\mathbf{E}_{0k}^*} = 0.$$

由此可見，自然光散射时，我們有

$$\overline{G_i G_k^*} = V|\mathbf{E}_0|^2\left\{\frac{a}{2}(\delta_{ik} - n_i n_k) + b\delta_{ik}\right\}. \qquad (93.15)$$

最后，取这个張量在两个偏振方向上的分量，我們得到所要求的公

式为

$$I_{\parallel}\sim\frac{a}{2}\cos^2\vartheta+b,\quad I_{\perp}\backsim\frac{a}{2}+b,\tag{93.16}$$

式中 ϑ 为散射角(**k** 和 **k′** 間的夹角)。

我們現在回头研究联系标量常数 a, b, c 与張量 α_{ik} 的公式(93.10)。和二秩的任何張量一样，張量 α_{ik} 在普遍情况下可以写成是三个独立部分之和:

$$\alpha_{ik}=\frac{\alpha}{3}\delta_{ik}+s_{ik}+a_{ik},\tag{93.17}$$

式中 $\alpha=\alpha_{ii}$ 为标量，s_{ik} 为迹等于零的对称張量 ($s_{ik}=s_{ki}$, $s_{ii}=0$)，而 a_{ik} 为反对称張量。把上式代入(93.10)式，并对不同的指标对进行降秩；于是我們得到下列三个方程[①]:

$$\left.\begin{aligned}
6a+3b+3c&=\int\overline{\alpha_{ii}^{(1)}\alpha_{kk}^{(2)*}}\,dV=\int\overline{\alpha^{(1)}\alpha^{(2)*}}\,dV,\\
3a+9b&=\int\overline{\alpha_{ik}^{(1)}\alpha_{ik}^{(2)*}}\,dV=\\
&=\frac{1}{3}\int\overline{\alpha^{(1)}\alpha^{(2)*}}\,dV+\int s_{ik}^{(1)}s_{ik}^{(2)*}\,dV+\int\overline{a_{ik}^{(1)}a_{ik}^{(2)*}}\,dV,\\
6a+3b-3c&=\int\alpha_{ik}^{(1)}\alpha_{ki}^{(2)*}\,dV=\\
&=\frac{1}{3}\int\overline{\alpha^{(1)}\alpha^{(2)*}}\,dV+\int s_{ik}^{(1)}s_{ik}^{(2)*}\,dV-\int\overline{a_{ik}^{(1)}a_{ik}^{(2)*}}\,dV.
\end{aligned}\right\}\tag{93.18}$$

这些方程的右側以及它們对 a, b, c 的解并不包含 α, s_{ik}, a_{ik} 的

① 这些方程右边的积分为正值，因为利用从(93.8)式变换到(93.9)式的逆变换，可以把其中的每一个写成完全平方的形式。用 a, b, c 表示这三个积分 [也即是对 a、b、c 解(93.18)式]，我們得到 a, b, c 的三个不等式为

$$2a+b+c>0,$$
$$2b+c-a>0,$$
$$2b+a-c>0.$$

从这些不等式中特別得出 $b>0$。

叉积。这表明任何散射过程都可以表示成三种过程(三种散射类型)的叠加形式，我們可以分别把它們称为标量散射、对称散射和反对称散射。我們来分别研究这三种散射类型。

在(93.18)式的右側只保留头一項，我們得到

$$a=c=\frac{1}{9}\int\overline{\alpha^{(1)}\alpha^{(2)*}}dV, \qquad b=0. \tag{93.19}$$

从(93.13)式我們看出，偏振光发生标量散射时，散射光也是完全偏振的，其强度的角分布由下式給出

$$I=\frac{3}{2}\sin^2\theta$$

(这里和下面，I 的表达式都已归一化为：使它們对方向的平均等于1)。当自然光散射时，总强度的角分布和散射光的消偏振度，按照(93.16)式，由下列公式給出：

$$I=I_\perp+I_\parallel=\frac{3}{4}(1+\cos^2\vartheta), \quad \frac{I_\parallel}{I_\perp}=\cos^2\vartheta$$

[参閱 415 頁底注內的公式]。

对对称散射，由(93.18)式給出

$$a=\frac{b}{3}=-\frac{c}{5}=\frac{1}{30}\int\overline{s_{ik}^{(1)}s_{ik}^{(2)*}}dV. \tag{93.20}$$

偏振光散射时，我們有

$$I=I_1+I_2=\frac{3}{20}(6+\sin^2\theta), \qquad \frac{I_2}{I_1}=\frac{3}{3+\sin^2\theta},$$

而自然光散射时，

$$I=\frac{3}{40}(14-\sin^2\vartheta), \quad \frac{I_\parallel}{I_\perp}=1-\frac{1}{7}\sin^2\vartheta.$$

最后，对反对称散射，我們得到

$$b=c=-a=\frac{1}{6}\int\overline{a_{ik}^{(1)}a_{ik}^{(2)*}}dV. \tag{93.21}$$

偏振光散射时，

$$I=\frac{3}{4}(1+\cos^2\theta), \quad \frac{I_1}{I_2}=\cos^2\theta,$$

而自然光散射时，

$$I=\frac{3}{8}(2+\sin^2\vartheta), \quad \frac{I_\perp}{I_\parallel}=\frac{1}{1+\sin^2\vartheta}.$$

§ 94. 散射的細致平衡原理

由細致平衡的量子力学普遍原理①，可以得到各种不同散射过程的强度之間的关系式。

我們用 dw_{12} 表示量子 $\hbar\omega_1$ 受到散射(在单位长路程上)后在立体角元 do_2 內产生量子 $\hbar\omega_2$ 的几率。我們再用 dw_{21} 表示量子 $\hbar\omega_2$ 受到散射后在立体角元 do_1 內产生量子 $\hbar\omega_1$ 的逆过程的几率。細致平衡原理給出这两种几率之間的关系为

$$\frac{dw_{12}}{k_2^2 do_2}=\frac{dw_{21}}{k_1^2 do_1},$$

式中 k_1, k_2 为两个量子的波矢量。代入 $k_1^2=\varepsilon_1\omega_1^2/c^2$, $k_2^2=\varepsilon_2\omega_2^2/c^2$ (其中 $\varepsilon_1=\varepsilon(\omega_1)$, $\varepsilon_2=\varepsilon(\omega_2)$)，我們得到

$$\varepsilon_1\omega_1^2\frac{dw_{12}}{do_2}=\varepsilon_2\omega_2^2\frac{dw_{21}}{do_1}. \tag{94.1}$$

在这关系式內假定了散射系統的初态和末态对应于分立的能級 E_1 和 E_2，它們之間的关系为

$$E_1+\hbar\omega_1=E_2+\hbar\omega_2.$$

这种提出問題的方式并不完全符合于实际的情况，因为宏观物体的能級譜是非常密集的，因而必須看成是准連續譜。

所以代替具有严格确定的頻率变化的散射几率 dw_{12}，我們必須引入在頻率范圍 $d\omega_2$ 內的散射几率，也即是物体跃迁到能量在 $dE_2=\hbar d\omega_2$ 范圍的状态的几率。我們用 dh_{12} 表示这几率(仍然化

① 参閱"量子力学"，§ 116。

为单位长路程的)，我們有

$$dh_{12}=dw_{12}\,d\Gamma_2=dw_{12}\frac{d\Gamma_2}{dE_2}h\,d\omega_2,$$

式中 $d\Gamma_2$ 为物体在能量范圍 dE_2 内的量子态数目。代替(94.1)，我們現在写出

$$\frac{d\Gamma_1}{dE_1}\varepsilon_1\omega_1^2\frac{dh_{12}}{do_2d\omega_2}=\frac{d\Gamma_2}{dE_2}\varepsilon_2\omega_2^2\frac{dh_{21}}{do_1d\omega_1}.$$

但是按照物体宏观状态的統計权重与其熵$\mathscr{S}$之間的熟知关系式，导数$\frac{d\Gamma}{dE}$基本上等于 $e^{\mathscr{S}}$，于是关系式为

$$\frac{d\Gamma_1/dE_1}{d\Gamma_2/dE_2}=e^{\mathscr{S}_1-\mathscr{S}_2}.$$

因为由一个量子散射所引起的物体能量的变化与其本身的能量比較是极其微小的，因而熵的变化也比較小，所以我們可以假定它等于

$$\mathscr{S}_1-\mathscr{S}_2=\frac{d\mathscr{S}}{dE}(E_1-E_2)=\frac{1}{T}(E_1-E_2)=\frac{h}{T}(\omega_2-\omega_1).$$

考虑到这种情况后，我們最后可以将散射的細致平衡原理的表达式写成下面的形式:

$$e^{-\frac{h\omega_1}{T}}\varepsilon_1\omega_1^2\frac{dh_{12}}{do_2d\omega_2}=e^{-\frac{h\omega_2}{T}}\varepsilon_2\omega_2^2\frac{dh_{21}}{do_1d\omega_1}.\tag{94.2}$$

量 dh (量綱为厘米$^{-1}$) 称为光散射的微分消光系数。也可以如下来定义它: dh 是单位时間內在媒质单位体积內所散射 (在频率范圍 $d\omega$ 和 do 方向上)的量子数与入射光內光子流的密度之比。将 dh 对散射光的所有方向和所有频率进行积分，我們就得到总消光系数，它代表光子流在散射媒质內傳播时光子流密度的衰减率。

設 $\omega_2<\omega_1$。关系式(94.2) 把斯托克斯散射(1→2)强度(消光系数)和反斯托克斯散射(2→1)强度联系起来。我們看到，第二种散射一般說来比第一种散射大致小一个因子:

$$e^{-\frac{\hbar(\omega_1-\omega_2)}{T}}.$$

这种情况具有相当普遍的性质，它相应于能量从物体傳递給电磁場时使这过程的几率减小$e^{-\frac{\Delta E}{T}}$倍，式中 ΔE 为所傳递的能量。特别是由于这一原因，被迫輻射通常是非常微小的，这时物体在每次散射动作中所放出的能量为 $\hbar(\omega_1+\omega_2)$。当 $\hbar(\omega_1+\omega_2)\gg T$ 时，这种过程的几率包含一个很小的因子：

$$e^{-\frac{\hbar_1(\omega_1+\omega_2)}{T}}.$$

在散射时頻率改变很小这一重要情况下，普遍关系式(94.2)可以大为簡化。我們把 ω_1 簡单地表示为 ω，而把小差值 $\omega_2-\omega_1$ 表示为 $\Delta\omega(\Delta\omega\ll\omega)$。此外，为簡单起見，我們引进符号：

$$\frac{dh_{12}}{do_2 d\omega_2}=I(\omega,\Delta\omega).$$

在(94.2)式的非指数因子 $s\omega^2$ 內，我們可以略去差数 $\Delta\omega$，然后在等式两側消去它們后，于是剩下

$$I(\omega,\Delta\omega)e^{-\frac{\hbar\omega}{T}}=I(\omega+\Delta\omega,\ -\Delta\omega)e^{-\frac{\hbar(\omega+\Delta\omega)}{T}}.$$

函数 $I(\omega+\Delta\omega, -\Delta\omega)$的第一个宗量給出光的初始頻率，我們可以略去其中的 $\Delta\omega$，也即是把散射光的强度化为对入射光的某一位移后的頻率值而言。于是

$$I(\omega,\Delta\omega)=I(\omega,-\Delta\omega)e^{-\frac{\hbar\Delta\omega}{T}}. \tag{94.3}$$

在这种近似下，等式两側的 I 系对入射光的同一頻率而言。換句話說，关系式(94.3)給出同一种光的斯托克斯散射和反斯托克斯散射間的簡单关系，其頻率移动的絕对值 $\Delta\omega$ 相等。

§ 95. 頻率改变小的散射

§ 93 內所发展的理論具有充分的普遍性，可以应用于各向同

性媒质內的各种散射情况，而与散射的具体机构无关。但是这种討論的普遍性当然不能推广到很远，对散射現象的进一步研究，还需要作一些更特别的假設。

在大多数观察到的实际情况下，光的散射只引起频率比較小的改变：$\Delta\omega=\omega'-\omega$。下面的計算即是針指这种情况而言，而且除条件 $\Delta\omega\ll\omega$，我們还假定在頻率范圍 $\Delta\omega$ 內，媒质的折射系数改变比較小。后一条件表明，頻率 ω 不能太靠近散射媒质的吸收区域（或吸收綫）。

如果 ω 属于光学光譜区域，則小 $\Delta\omega$ 的微观散射机构可能与原子和分子的某些运动（也即是原子核的运动，当它与引起光学跃迁的純电子运动方向相反时）有关，这些运动包括分子內原子的振动，整个分子的轉动或振动等等。

假設 $q=q(t)$ 为描写引起散射的运动的一組坐标①。因为这种运动比較慢，因而我們可以从新的观点来研究散射的宏观描写。也即是可以引进介电常数張量 $\varepsilon_{ik}(q)$，它的分量在任何时刻都只依賴于同一时刻作为參量的坐标 q 的数值。这一性质是由于我們假定 ε 的相对改变很小。这样引入的介电常数是对原子核的位置固定时对电子的运动求平均的場而言。对于完全的平均場（也包括对原子核运动求平均），介电常数变成标量 $\varepsilon=\varepsilon(\omega)$。$\varepsilon_{ik}$ 与这个值的偏差我們用 $\delta\varepsilon_{ik}$ 表示：

$$\varepsilon_{ik}(q)=\varepsilon\delta_{ik}+\delta\varepsilon_{ik}(q). \tag{95.1}$$

張量 ε_{ik} 給出作为时間函数的場强和感应强度之間的关系。应着重指出，入射波仍然假定为单色的（頻率为 ω），但散射波的場 $\mathbf{E}'$現在看作是时間的函数，不能分解为单色分量。总場包括入射波的場 $\mathbf{E}$ 和散射波的場 $\mathbf{E}'$；于是

① 为簡单起見，我們将采用古典观点进行討論；但下面得到的結果，当用量子力学描写原子核的运动时，实际上也仍然是正确的。

$$D_i+D'_i=\varepsilon_{ik}(E_k+E'_k).$$

按照定义，消去項 D 和 $\varepsilon\mathbf{E}$，并略去二級小量 $\delta\varepsilon_{ik}E'_k$ 后，我們得到

$$D'_i=\varepsilon E'_i+\delta\varepsilon_{ik}(q)E_k. \tag{95.2}$$

关系式(95.2)的形式和(93.2)式相同，但是其差别是：用上述方法处理問題时显然看出，在現在的情况下，張量 $\alpha_{ik}=\delta\varepsilon_{ik}$ 是对称的。这可以从介电常数張量的对称性的普遍理論直接看出。此外，因为透明媒质的介电常数为实数，可以断言，張量 $\delta\varepsilon_{ik}$ 也是实数。

張量 α_{ik} 不存在反对称部分表明，在 § 93 末所指出的三种散射中，不存在频率改变小的反对称散射。

我們現在来計算散射的总强度（频率变化 $\Delta\omega\ll\omega$）。在現在的情况下这可以計算如下。在散射波場方程(93.3)內，我們可以用 $k=\omega\sqrt{\varepsilon/c}$ 代替 k'（以及取 $\omega'=\omega$ 时的 α 值），然后这方程一般不再包含 ω'，也即是对場的任何譜分量都相同。因此，該方程也适用于散射波的未分解为傅立叶分量的場，我們用 $\mathbf{E}'$ 来表示它。利用(93.6)形式的解，我們得到

$$\overline{|\mathbf{E}'|^2}=\frac{k^4}{16\pi^2\varepsilon^2R_0^2}\overline{|\mathbf{G}|^2}\sin^2\theta=\frac{\omega^4}{16\pi^2R_0^2c^4}\overline{|\mathbf{G}|^2}\sin^2\theta,$$

式中 θ 为 k 与 G 間的夹角，而短横表示最后对粒子的运动求平均（也即是对 $q(t)$ 的时間关系求平均值），这和 § 93 內一样。

我們定义消光系数 h 为散射媒质单位体积內所有方向的散射光的总强度与入射光通量的密度之比①：

$$h=\frac{1}{V|\mathbf{E}|^2}\int\overline{|\mathbf{E}'|^2}R_0^2do'=\frac{\omega^4}{6\pi c^4V}\frac{\overline{|\mathbf{G}|^2}}{|\mathbf{E}|^2}.$$

如我們在 § 93 內已看到的，在計算平均值 $\overline{|\mathbf{G}|^2}$ 时，可以用 1

① 这一定义和 § 94 所給出的普遍定义（根据散射量子数）相差一个因子 ω'/ω。在現在的情况下，可以假定这因子等于 1，因而两个定义是等价的。

代替 G 的被积式内的指数因子，于是

$$\overline{|\mathbf{G}|^2}=E_{0i}E_{0k}^*\overline{\int\delta\varepsilon_{li}dV\int\delta\varepsilon_{lk}dV}.$$

这里要求平均值的式子代表二秩張量，因为媒质是各向同性的，在平均后得到

$$\overline{\int\delta\varepsilon_{li}dV\int\delta\varepsilon_{lk}dV}=\frac{1}{3}\delta_{ik}\overline{\left(\int\delta\varepsilon_{lm}dV\right)^2}.$$

这样一来，最后得到

$$h=\frac{\omega^4}{18\pi c^4}\frac{1}{V}\overline{\left(\int\delta\varepsilon_{lm}dV\right)^2},\tag{95.3}$$

或

$$h=\frac{\omega^4}{18\pi c^4}V\overline{(\delta\varepsilon_{lm})_V^2},\tag{95.4}$$

式中已引进符号$(\cdots\cdots)_V$表示对体积V求平均。

积分的均方值也可以写为重积分的平均值形式，而且由此看到（参閲 § 93）它与体积V成正比。因此消光系数的数值并不依賴于散射体积，这正如所預料的。我們还必須注意到，消光系数h也不依賴入射光的偏振。

公式(95.4)可以作如下解釋。我們可以形式地說，在完全的均匀媒质内（也即是介电常数精确地为常数的媒质），一般不存在散射现象。从宏观的观点看来，可以把散射看成是由于媒质的不均匀性所引起的。这种不均性随时間的变化在分解为譜分量后，給出光散射时的頻率变化。

§ 96. 气体和液体内的瑞利散射

按照光頻率改变的特征，可以区别两种散射：1)联合散射（拉曼-兰茨别克-曼捷耳什坦姆效应），引起散射光内出現頻率不同于入射光頻率的譜綫；2)瑞利散射，这时頻率基本上不改变。

气体内的联合散射机构是：在入射光的作用下，分子的振动、

轉动或电子状态发生了变化[①]。但瑞利散射不引起分子內部状态的任何变化。在气体很稀薄的极限情况下(分子的自由路程长度 l 大于光的波长 λ)，每个分子上的散射是独立发生的；这种現象可以用微观的量子力学的方法来研究。

我們現在来研究相反的情况，即 $l \ll \lambda$[②]。在这种情况下，气体內的瑞利散射可以分为两部分。其中一部分是由于分子取向的不規則性(称为各向异性起伏)所引起的。另一部分代表由气体密度的起伏所引起的散射。通过几次碰撞的結果，也即是經过与自由路程时間 τ 的同数量級的时間以后，分子的取向已完全改变。因此各向异性起伏所引起的散射导至出現比較寬的譜綫，其峰值在 $\omega'=\omega$ 处，寬度为 $\sim \hbar/\tau$。但密度起伏所引起的散射导至在这本底上出現比較尖銳的譜綫。如我們在下面所讲的，对于波长为 λ 的光的散射，在体积 λ^3 內的密度起伏起着重要作用。由于这些体积很大，因而这些体积內的起伏变化也比較慢，所以散射的譜綫也就比較窄。我們下面称这种譜綫为“未移动的譜綫”。

密度起伏所引起的散射是标量型的(参閱 § 93 末)；显然，因为密度 ρ 是标量，因而由密度 ρ 的变化所引起的介电常数的改变 $\delta\varepsilon$ 也是标量。描写各向异性起伏所引起的介电常数的变化，是利用迹为零的对称張量 $\delta\varepsilon_{ik}$，后一性质可从下列事实看出，在对所有的方向求平均时，这种效应一般必須完全消失。由此可見，各向异性起伏所引起的散射是对称型的。

液体內的情况要复杂得多。这时联合散射完全是由于分子的振动(或电子)状态的改变所引起的。液体內的散射不会产生轉动

---

① 在通常的观察条件下，电子的跃迁不起作用。

② 更精确地說，下面的必要条件为 $l \ll \sin\frac{\vartheta}{2}$，其中 ϑ 为散射角。这原因在于，在确定散射强度的公式(96.4)內，光的頻率只包含在 $q=\frac{2\omega}{c}\sin\frac{\vartheta}{2}$ 的式子內。

的联合譜綫。这原因在于，由于液体內分子間有很强的相互作用，分子不能自由轉动以致产生分立的轉动能級。所以，分子的轉动和使分子改变相互位置的其他运动一样，在液体內只对 $\omega'=\omega$ 处产生比較寬的散射譜綫作出貢献，在这种情况下，可以很自然地称它为瑞利散射。这种运动的弛豫时間主要依賴于液体的粘度。

从液体內的总瑞利散射中分出由热力学起伏(密度、温度起伏)所引起的散射部分，这种可能性决定于弛豫时間的数值。为此，必須使液体內建立平衡过程的弛豫时間小于上述起伏发生变化的时間。在这些条件下，可以观察到一条“未移动”的窄譜綫和其周圍的較寬的本底。对应于未移动譜綫的散射是标量型的。但是不同于气体的情况，一般說来我們不能断言寬本底是純对称散射，而沒有“摻杂”标量部分在內。

利用(95.4)的普遍公式，很容易算出未移动譜綫的总强度。在标量散射时，$\delta \varepsilon_{ik}=\delta\varepsilon\delta_{ik}$，因而消光系数 h 为

$$h=\frac{\omega^4}{6\pi c^4}V\overline{(\delta\varepsilon)_V^2}. \tag{96.1}$$

如果用 $\delta\rho$ 和 δT 表示密度和温度的变化，则

$$\delta\varepsilon=\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)_T\delta\rho+\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial T}\right)_\rho\delta T.$$

按照熟知的公式①，密度和温度的起伏在統計上是独立的($\overline{\delta T\delta\rho}=$ $=0$)，而它們各个的均方值为

$$\overline{(\delta T)_V^2}=\frac{T^2}{\rho c_v V},\qquad \overline{(\delta\rho)_V^2}=\frac{T\rho}{V}\left(\frac{\partial\rho}{\partial p}\right)_T,$$

c_v 为媒质单位质量的热容量。由此可見，我們最后得到

$$h=\frac{\omega^4}{6\pi c^4}\left[T\rho\left(\frac{\partial\rho}{\partial p}\right)_T\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)_T^2+\frac{T^2}{\rho c_v}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial T}\right)_\rho^2\right]. \tag{96.2}$$

这公式最先由爱因斯坦导出(1910)。

---

① 参閱“統計物理学”，第三版，§110。

对于气体，公式 (96.2) 变得非常简单。气体的介电常数(在光学频率区域内)差不多不依賴于溫度；因此，方括弧内的第二項可以略去。对密度的依賴关系归結为 $\varepsilon-1$ 与 ρ 成正比，因而

$$\rho\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)_T\approx\varepsilon-1\approx2(n-1),$$

$n=\sqrt{\varepsilon}$ 为折射系数。还考虑到，按照理想气体的状态方程：$\left(\frac{1}{\rho}\right)\left(\frac{\partial\rho}{\partial p}\right)_T=1/NT$（$N$为单位体积内的粒子数），我們得到

$$h=\frac{2\omega^4}{3\pi c^4}\frac{(n-1)^2}{N}. \qquad (96.3)$$

这公式最先由瑞利得到(1881)。

其次，我們来研究“未移动”譜綫的精細結构的問題。为此，我們必須研究起伏的时間过程。大家知道，在这方面热力学起伏可以分为两类①。液体内(或气体内)压强的絕热起伏以非衰减波的形式而傳播，傳播速度为声速 u（在这里我們不考虑声的吸收，因为它只是引起譜綫变寬，参閱后面的討論）。但压强不变时的熵起伏，在液体内一般是不能傳播的(只是由于热傳导而逐漸衰减)。

强度的时間变化过程(不对时間求平均)由下式积分的模量平方得出

$$\mathbf{G}(t)=\int\delta\varepsilon(t)\cdot e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}}dV\cdot\mathbf{E}_0, \qquad (96.4)$$

其中 $\delta\varepsilon$ 看作为时間的函数。要求出散射譜綫的形状，必須将 $\mathbf{G}(t)$ 分解为譜分量(也即是必須分解 $\delta\varepsilon(t)$)，然后强度按頻率 $\Delta\omega$ 的分布由譜分量 $\mathbf{G}_{\Delta\omega}$ 的模量平方得出。但是这时在 (96.4) 内不能用 1 代替因子 $e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}}$，如我們在前面所进行的。原因在于，量 $|\mathbf{G}_{\Delta\omega}|^2$ 显著地依賴于空間不同点处起伏的时間过程的关联。这把 $|\mathbf{G}_{\Delta\omega}|^2$ 写成重积分的形式可明显看出：

① 参閱“連續介质力学”，第二版，§ 79。

$$\iint \delta s(t)\cdot\delta s(t')e^{-i\mathbf{q}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}e^{i\Delta\omega(t-t')}\times$$

$$\times dV dV' dt dt'.$$

同时由于声扰动傳播的波动性质，压强起伏的时間变化，甚至在很大的距离处也是关联的。这种情况对計算譜綫的总强度并不重要，后者由将平方$|\mathbf{G}(t)|^2$对时間求平均得出；因为$\mathbf{G}(t)$和$\mathbf{G}^*(t)$取在同一时刻，因而对于这些量只在同一时刻，空間不同点处的δs值間的关联才占重要，但是这种关联只能扩展到很短的距离。

我們首先研究由压强起伏所引起的变化δs。(96.4)式的量是起伏δs的傅立叶空間分量，其波矢量为$\mathbf{q}$。但这种声音起伏与时間的关系由$e^{-it\Delta\omega}$給出，其中

$$\Delta\omega=\pm qu.$$

因为$\omega\approx\omega'$，因而

$$q=|\mathbf{k}'-\mathbf{k}|=2\frac{\omega}{c}\sin\frac{\vartheta}{2},$$

式中ϑ为$\mathbf{k}'$与$\mathbf{k}$間的夹角；将相应的$\Delta\omega$的值用$\Delta\omega_0$表示，于是我們得到

$$\Delta\omega_0=uq=\pm 2\omega\frac{u}{c}\sin\frac{\vartheta}{2}. \tag{96.5}$$

由此可見，压强起伏所引起的散射导至出現双綫（称为孟德耳什塔姆-布里淵双綫），其分量間的距离$2\Delta\omega_0$依賴于散射角。

如上面所述，熵起伏的频率为零。因此熵起伏所引起的散射产生一条$\Delta\omega=0$的中央綫。

我們現在来求出双綫和中央綫的强度。未移动譜綫的总强度由公式(96.2)求出，于是只須求出例如比值$\frac{I_{双綫}}{I_{总}}$就够了（此处$I_{双綫}$系指双綫的两个分量的强度之和，也即是每一分量强度的两倍[①]。

---

① 按照(94.3)式，两个分量的强度的差别是完全不重要的，因为$\hbar\Delta\omega_0\ll T$。

因为双綫是由压强的絕热起伏的散射所引起的，因而它們的强度由下列的均方值給出：

$$\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial p}\right)_S^2\overline{(\delta p)^2_V}.$$

利用压强絕热起伏的熟知公式，并利用熟知的絕热压縮和等溫压縮的比值公式进行簡单的变換后，我們得到

$$\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial p}\right)_S^2\overline{(\delta p)^2_V}=\frac{\rho T}{V}\left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\right)_S\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial p}\right)_S^2=\frac{\rho T}{V}\left(\frac{\partial\rho}{\partial p}\right)_S\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)_S^2=$$

$$=\frac{\rho T c_v}{V c_p}\left(\frac{\partial\rho}{\partial p}\right)_T\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)_S^2. \tag{96.6}$$

把絕热导数$\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)_S$变換到变数 ρ 和 T，可以用更为方便的量来表示它：

$$\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)_S=\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)_T+\frac{T}{c_v\rho^2}\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_\rho\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial T}\right)_\rho.$$

所要求的强度之比由(96.6)与总起伏的均方值[(96.2)方括号内的式子]之比給出。我們在这里不去写出非常复杂的普遍公式，只是写出略去了 ε 对溫度的依賴关系的簡单公式：

$$\frac{h_{\text{双綫}}}{h_{\text{总}}}=\frac{c_v}{c_p} \tag{96.7}$$

(Л. 朗道，Г. 普拉切克，1933)。

为了求出譜綫的形状，必須研究引起起伏“衰减”的耗散过程。由于这些过程，起伏的振幅按照定律 $e^{-\gamma t}$ 随时間而衰减，其中的系数 γ 为定常数。若起伏振蕩的“本征频率”为 $\Delta\omega_0$，則与时間的总依賴关系由因子 $e^{\mp t(i\Delta\omega_0+\gamma)}$給出。譜綫內的强度分布与这个因子的傅立叶分量的模量平方成比例，也即是

$$dI=\frac{I_0}{\pi}\frac{\gamma}{(\Delta\omega-\Delta\omega_0)^2+\gamma^2}d\Delta\omega, \tag{96.8}$$

式中 I_0 为譜綫的总强度(这种譜綫形状称为色散形状)。譜綫寬度

为 γ。

按照熟知的声吸收公式[1]，波矢量为 $\mathbf{q}$ 的声音起伏的衰减系数为

$$\gamma=\frac{q^2}{2\rho}\left[\frac{4}{3}\eta+\zeta+\kappa\left(\frac{1}{c_v}-\frac{1}{c_p}\right)\right],$$

式中 η, ζ 为液体的粘滞系数，而 κ 为液体的导热系数。代入 $q^2=$ $=2\left(\frac{\omega}{c}\right)^2(1-\cos\vartheta)$，我們得到双綫分量的寬度表达式为

$$\gamma=\frac{\omega^2}{\rho c^2}(1-\cos\vartheta)\left[\frac{4}{3}\eta+\zeta+\kappa\left(\frac{1}{c_v}-\frac{1}{c_p}\right)\right]. \tag{96.9}$$

熵的(以及溫度的)等压起伏的衰减由导热方程得出:

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\chi\Delta T,$$

式中 χ 为媒质的热导率。对波矢量为 $\mathbf{q}$ (也即是空間变化为 $e^{i\mathbf{qr}}$) 的起伏，由此得到

$$\gamma=\chi q^2=2\chi\frac{\omega^2}{c^2}(1-\cos\vartheta). \tag{96.10}$$

中央譜綫的形状由 (96.8) 式給出，令其中 $\Delta\omega_0=0$，寬度 γ 由 (96.10) 式得出。

如本节开头所指出的，上述的理論可应用于液体內的散射，只要其中的弛豫时間小于起伏发生变化的时間。应注意到，在各种液体內，弛豫时間有不同的数量級。最快的弛豫过程看来是液体內彈性应力的衰减。相应的(“麦克斯韦式的”)弛豫时間为 $\tau_M\sim\frac{\eta}{G}$，式中 G 为切变模量[2]。較慢的过程为分子的重新取向，也即是各向异性起伏的“衰減”。相应的(“称为德拜的”)弛豫时間为 $\tau_D\sim\frac{\eta a^3}{kT}$，式中 a 为分子綫度；τ_M 与 τ_D 之差在大分子的液体內特别大。

---

① 参閱“連續介质力学”，第二版，§ 77。

② 参閱“連續介质力学”，第二版，第二部分，§ 31。

最后，可能还存在其他較慢的弛豫过程引起声音的色散(例如，化学反应，能量緩慢地傳递到分子的振动自由度上等)。$\frac{1}{\tau}$可以与引起散射的"声"扰动頻率相比的过程，对散射特别重要。目前文献中还缺乏对各种可能情况的全面分析，我們在这里不去討論这一問題。只是指出，若液体的粘度很大，当

$$\tau_M \gg \frac{1}{qu} \sim \frac{c}{\omega u \sin\frac{\vartheta}{2}}$$

时，液体对光散射的行为和非晶形固体相同。

最后我們还提到液体自由表面上发生的一种奇异现象。由于起伏振动，液体的表面不是理想平面。这种起伏的"粗糙"表面引起从表面反射的光有一部分是散射的(Л. И. 孟德耳什坦姆，1913)①。

例 題

設光在綫形分子的气体內发生散射，极化率 $\alpha_\parallel$ 和 $\alpha_\perp$ 分别平行和垂直于軸方向。試求各种散射类型的强度。

解. 散射光的总强度(分子的振动状态和电子状态一定)包括全部瑞利散射和联合散射的轉动部分。因为散射是在气体每个分子上独立发生的，因而只要将(72.3)式乘上单位体积内的粒子数 N，并用 $\frac{1}{3}\alpha_{ik}^2 = \frac{1}{3}(\alpha_\parallel^2 + 2\alpha_\perp^2)$ 代替粒子的极化率平方，就可以极其簡单地得到总消光系数为

$$h = \frac{8\pi\omega^4 N}{9c^4}(\alpha_\parallel^2 + 2\alpha_\perp^2). \tag{1}$$

未移动的瑞利譜綫是由极化率的标量部分所引起的，也即是它的产生仿佛是分子的极化率張量等于$\frac{1}{3}\alpha_{ll}\delta_{ik}$。因此从同一公式(72.3)，我們得到

---

① 参閱 Л. И. 孟德耳什坦姆，Собр. соч. т. I. стр 246, Изд. АН СССР, 1948。在这篇論文中，对入射面上散射的光进行了計算。

$$h_{未移动}=\frac{8\pi\omega^4N}{9c^4}\frac{(\alpha_{\parallel}+2\alpha_{\perp})^2}{3}. \tag{2}$$

$h_{总}-h_{未移动}$之差包括未移动譜綫的“本底”(各向异性起伏引起的散射)和轉动联合散射。为了分出前者，必須首先将分子的极化率張量对繞某一特定軸(垂直于分子軸)的轉动求平均。显然，在轉动軸方向上，这样求得的平均极化率等于$\alpha_{\perp}$，而在垂直于轉动軸的平面內的任何方向上，平均极化率等于$\frac{1}{2}(\alpha_{\perp}+\alpha_{\parallel})$。換句話說，必須把繞某一給定軸轉动的分子看作是极化率張量的主值为

$$\alpha_{\perp},\ \frac{1}{2}(\alpha_{\perp}+\alpha_{\parallel}),\ \frac{1}{2}(\alpha_{\perp}+\alpha_{\parallel})$$

的粒子。利用这些，我們可以算出迹为零的对称張量$\alpha_{ik}-\frac{1}{3}\alpha_{ll}\delta_{ik}$，然后由类似于推导(1)和(2)式的計算，得出

$$h_{本底}=\frac{8\pi\omega^4N(\alpha_{\perp}-\alpha_{\parallel})^2}{9c^4\cdot 6}. \tag{3}$$

最后，从(1)式减去(2)和(3)式，得到轉动联合散射的强度为

$$h_{联合}=\frac{8\pi\omega^4N}{9c^4}\frac{(\alpha_{\perp}-\alpha_{\parallel})^2}{2}.$$

§97. 临界乳化

大家知道，物质的等溫压縮$\left(\frac{\partial\rho}{\partial p}\right)_T$，当接近临界状态时无限制地增加。因而标量瑞利散射总强度的表达式(96.2)也增加。这表明在临界点附近，散射剧烈地加强，称为临界乳化[①]。但是(96.2)式本身这时已变成不能应用，因为利用来推导它的热力学起伏的表达式已不再是正确的。

强度的增加并不是对瑞利譜綫精細結构的三个分量都发生，而只是发生于中央分量。至于双綫的分量，按照(96.2)和(96.7)，我們得到

① 在第二种相变的临界点附近，固体內散射时发生类似的现象。这由 В. Л. Гинзбург 进行了研究(ДАН СССР, 105, 240, 1955)。

$$h_{双線} \cong \frac{\omega^4}{6\pi c^4} \frac{T\rho c_v}{c_p} \left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_T \left(\frac{\partial s}{\partial \rho}\right)_T^2.$$

按照熟知的热力学公式:

$$c_p - c_v = \frac{T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_\rho^2}{\rho^2 \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T},$$

我們得到临界点附近的有限量为

$$h_{双線} = \frac{\omega^4}{6\pi c^4} \frac{\rho^3 c_v}{\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_\rho^2} \left(\frac{\partial s}{\partial \rho}\right)_T^2. \tag{97.1}$$

如我們在下面所讲的,在临界点附近,甚至在計算散射的总强度(而不只是精細結构)时,(96.4)式內的因子 $e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}}$ 也不能用 1 来代替。我們用 dh 表示对立体角 do(这相当于給定值 $\mathbf{q}=\mathbf{k}-\mathbf{k}'$)內的散射而言的微分消光系数。为明确起見,我們只限于研究自然光的散射, 并且記住它的角关系(标量散射时)由因子$\frac{3}{4}(1+\cos^2\vartheta)$給出,于是得到 dh 为

$$dh = \frac{\omega^4}{6\pi c^4} \frac{1}{V} \overline{\left|\int \delta s \cdot e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}} dV\right|^2} \frac{3}{4}(1+\cos^2\vartheta) \frac{do'}{4\pi}. \tag{97.2}$$

在临界点附近, 密度的起伏增加, 而溫度的起伏仍是有限的。因此只須研究起伏 $\delta s = \left(\frac{\partial s}{\partial \rho}\right)_T \delta\rho$, 于是

$$dh = \frac{\omega^4}{6\pi c^4} \left(\frac{\partial s}{\partial \rho}\right)_T^2 \frac{1}{V} \overline{\left|\int \delta\rho \cdot e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}} dV\right|^2} \frac{3}{4}(1+\cos^2\vartheta) \frac{do'}{4\pi}. \tag{97.3}$$

按照起伏理論,在临界点附近,密度起伏的均方值可用下列式子內的系数 a 和 b 来表示:

$$F - \bar{F} = \frac{a}{2}(\delta\rho)^2 + \frac{b}{2}(\nabla\delta\rho)^2, \tag{97.4}$$

式中 F 为物体单位体积的自由能①。

① 参閱"統計物理学",第二版,§ 115。

这个公式代表自由能变化展开为 $\delta\rho$ 及其陡度的冪級数的头几項；必須計及后者是因为在临界点附近，物体內局部的不均匀性增大。常数 a 用通常的热力学量表示为①

$$a=\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T. \tag{97.5}$$

(97.3)內的均方值用 a 和 b 表示为

$$\overline{\left|\int \delta\rho e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}}\,dV\right|^2}=\frac{VT}{a+bq^2}. \tag{97.6}$$

把它代入(97.3)，我們最后得到結果为

$$dh=\frac{\omega^4}{32\pi^2c^4}\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho}\right)_T^2\frac{1+\cos^2\vartheta}{\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T+2\frac{\omega^2}{c^2}b(1-\cos\vartheta)}do', \tag{97.7}$$

这公式最先由 L. S. 奥尔斯坦和 F. 澤尔尼克导出 (1914)。当角度 ϑ 不太小时，可以略去分母內的第一項，于是

$$dh=\frac{\omega^2}{64\pi^2c^2b}\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho}\right)_T^2\frac{1+\cos^2\vartheta}{1-\cos\vartheta}do'. \tag{97.8}$$

将(97.7)式对 do' 进行积分，就得到所有方向的散射总强度。当 $\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T=0$（也即是在临界点处），在小角度下，积分是对数发散的。实际上，积分必須只进行到与折射角同数量級的角度（$\sim\frac{\lambda}{L}$，式中 L 为物体的綫度）。因此，总强度对数性地依賴于散射物体的綫度。

§ 98. 非晶形固体內的散射

非晶形固体內的瑞利散射②，与液体和气体內的瑞利散射大

---

① 导数 $\left(\frac{\partial F}{\partial \rho}\right)_T$ 为物体单位质量的热力学势。因此二次导数为

$$a=\left(\frac{\partial^2 F}{\partial \rho^2}\right)_T=\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \rho}\right)_T=\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T.$$

② 晶体內散射理論的介紹，可參閱 М. В. Волькенштейн 的"分子光学"，Гостехиздат, 1951.

不相同。大家知道，在各向同性固体內，不是只有一个而是有两个声音傳播速度——纵速度 u_l 和横速度 u_t。因此瑞利譜綫的精細結构不是包含一条而是包含两条孟德耳什塔姆-布里淵双綫。它們是由于纵向"声波"和横向"声波"上的散射所引起的，并且距离中央譜綫的距离分別为 $\pm\Delta\omega_l$ 和 $\pm\Delta\omega_t$，其中

$$\Delta\omega_l=u_l q,\quad \Delta\omega_t=u_t q.$$

因为总是 $u_l>u_t$，因而 $\Delta\omega_l>\Delta\omega_t$。譜綫的中央分量仍然是由于不能在媒质內傳播的起伏上的散射所引起的。在这些起伏中，在現在的情况下起主要作用的是結构起伏。在非晶形物体內，由于原子的排列是无序的，因而这些起伏也比較大，并且实际上不随时間而改变(由于固体內的扩散过程极其緩慢)。由于这些起伏所引起的散射，导至产生宽度实际为零的强譜綫。按照这种散射的偏振和角分布，这种散射是标量散射和对称散射的集合。

我們現在来研究非晶形物体內瑞利譜綫的双綫分量。和在液体和气体內不同，甚至在計算散射光的总强度(和偏振)时，我們也不能令积分 G 內的因子 $e^{-i\mathbf{qr}}=1$。于是 § 93 內按散射的角度关系来进行分类的方法也失去作用。这原因在于，在固体內，一切形变效应(在現在的情况下为起伏)可以傳播到很大的距离。因此物体各点处的起伏，在同一时刻，甚至在比 $\frac{1}{q}$ 大的距离上也是关联的。

散射波的場由下列公式給出

$$\mathbf{E}'=-\frac{e^{ikR_0}\omega^2}{4\pi R_0c^2}[\mathbf{n}'[\mathbf{n}'\mathbf{G}]],\tag{98.1}$$

式中

$$G_i=\int\delta\varepsilon_{ik}e^{-i\mathbf{qr}}dV\cdot E_{0k},\tag{98.2}$$

而 $\mathbf{n}'$ 为散射方向的单位矢量。由于各向同性物体发生形变所引起的介电常数的变化为

$$\delta\varepsilon_{ik}=a_1u_{ik}+a_2u_{ll}\delta_{ik},\tag{98.3}$$

式中 u_{ik} 为形变張量[参閱 (81.1)]。因为积分(98.2)从 $\delta\varepsilon_{ik}$ 分出了波矢量为 $\mathbf{q}$ 的傅立叶空間分量，因而在(98.3) 内必須把 u_{ik} 理解为具有这波矢量的声波内的形变。因此形变时的位移矢量可以写为

$$\mathbf{u}=\mathrm{Re}\{\mathbf{u}_0e^{i\mathbf{qr}}\}=\frac{1}{2}(\mathbf{u}_0e^{i\mathbf{qr}}+u_0^*e^{-i\mathbf{qr}}), \tag{98.4}$$

由此得到形变張量为

$$u_{ik}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}+\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)=\mathrm{Re}\left\{\frac{i}{2}(u_{0i}q_k+u_{0k}q_i)e^{i\mathbf{qr}}\right\},$$

而体积分为

$$\int u_{ik}e^{-i\mathbf{qr}}dV=\frac{iV}{4}(u_{0i}q_k+u_{0k}q_i). \tag{98.5}$$

首先我們研究横向"声"波所引起的散射。因为在横波内，$\mathbf{u}\perp\mathbf{q}$ 和 $u_{ll}=0$，因而

$$\delta\varepsilon_{ik}=a_1u_{ik}.$$

利用(98.5)，于是我們得到

$$\mathbf{G}=\frac{iVa_1}{4}\{\mathbf{u}_0(\mathbf{qE}_0)+\mathbf{q}(\mathbf{u}_0\mathbf{E}_0)\}. \tag{98.6}$$

横向声波可以有二个独立的偏振方向：矢量 $\mathbf{u}$ 可以在 $\mathbf{k}, \mathbf{k}'$ 平面內，或与它垂直。还考虑到 $\mathbf{E}\perp\mathbf{k}$，容易看出，在第一种情况下，$\mathbf{G}$ 在垂直于 $\mathbf{k}'$ 的平面上的投影等于零。由此可見，横向声波在 $\mathbf{k}, \mathbf{k}'$ 平面內"偏振化"，一般說来不散射光。

若位移矢量 $\mathbf{u}$ 垂直于 $\mathbf{k}, \mathbf{k}'$ 平面，則利用(98.1)和(98.6)式进行簡单的計算，得到散射波場的表达式为

$$\begin{aligned}E'_{\parallel}&=\frac{e^{ikR_0}\omega^2}{4\pi R_0c^2}\frac{a_1iV}{4}qu_0\cos\frac{\vartheta}{2}E_{\perp},\\E'_{\perp}&=\frac{e^{ikR_0}\omega^2}{4\pi R_0c^2}\frac{a_1iV}{4}qu_0\cos\frac{\vartheta}{2}E_{\parallel},\end{aligned} \tag{98.7}$$

和通常一样，ϑ 为 $\mathbf{k}$ 和 $\mathbf{k}'$ 間的夹角，而下角标 $\parallel$ 和 $\perp$ 表示矢量

在散射平面的分量和与該平面垂直的分量。两个式子內的比例系数包含相同的起伏量 u_0。这表明散射时不发生消偏振——綫偏振光仍然为綫偏振光(虽然在另一平面內)。

由于(98.7)两个公式內的系数完全相同，因而消光系数 dh 不依賴于入射光的偏振状态，并且等于

$$dh=\left(\frac{q\omega^2 a_1}{16\pi c^2}\right)^2 V\overline{|u_0|^2}\cos^2\frac{\vartheta}{2}do. \tag{98.8}$$

剩下的一步是求出起伏位移 u_0 的振幅的均方值。

从热力学起伏的普遍理論的观点看来，可以把(98.4)的声波看作是两个古典振子的集合(向左和向右傳播的波)，每一振子的平均动能为$\frac{T}{2}$。因为在現在的情况下，振动频率为 $\Delta\omega=u_t q$，因此，平均动能为

$$\frac{1}{2}V\overline{\rho\dot{\mathbf{u}}^2}=\frac{1}{4}V\rho(u_t q)^2\overline{|u_0|^2}.$$

令这式子等于 $2\cdot\frac{T}{2}$，我們得到

$$\overline{|u_0|^2}=\frac{4T}{V\rho u_t^2 q^2}. \tag{98.9}$$

最后，将(98.9)代入(98.8)，我們得到

$$dh=\frac{a_1^2\omega^4 T}{64\pi^2 c^4 u_t^2\rho}\cos^2\frac{\vartheta}{2}do. \tag{98.10}$$

我們注意到散射的角度依賴关系完全不同于在液体和气体內的情况。

我們現在来研究纵"声"波上的散射。在这种波內，$\mathbf{u}\parallel\mathbf{q}$，并且利用(98.3)和(98.4)，我們得到

$$\mathbf{G}=\frac{iV}{2}u_0 q\left\{a_1\frac{\mathbf{q}(\mathbf{q}\mathbf{E}_0)}{q^2}+a_2\mathbf{E}_0\right\}.$$

由簡单的計算，得到散射波場为

$$E'_{\perp}=\frac{e^{ikR_0}\omega^2}{4\pi R_0c^2}\frac{iVu_0q}{2}a_2E_{\perp}$$

$$E'_{\parallel}=\frac{e^{ikR_0}\omega^2}{4\pi R_0c^2}\frac{iVu_0q}{2}\left[\frac{a_1}{2}+\left(\frac{a_1}{2}+a_2\right)\cos\vartheta\right]E_{\parallel}. \tag{98.11}$$

在这种情况下，散射时也不发生消偏振現象。但角分布和消光系数依賴于入射光的偏振状态和偏振方向。我們在这里不去写出相应的十分复杂的公式，計算完全和上面給出的相同，而且 $\overline{|u_0|^2}$ 的表达式的差别只是在(98.9)內用 u_l 代替了 u_t。

第十五章　晶体內倫琴射綫的衍射

§99. 倫琴射綫衍射的普遍理論

晶体內倫琴射綫的衍射現象在物质媒质的电动力学中占据着特別的位置，因为倫琴射綫的波長可以和原子間距相比較。由于这一原因，通常把物质看成連續媒质的宏观观点，在这里完全不能应用，因此，我們必須从研究单个带电粒子（电子）上的散射开始①。

原子內电子运动頻率的数量級为$\omega_0 \sim \frac{v}{a}$，式中 v 为电子的速度，而 a 为原子綫度。若 $\lambda \sim a$，則由于 $v \ll c$，这些頻率小于倫琴射綫的頻率 $\omega \sim \frac{c}{\lambda}$。由于这种情况，可以写出电磁波場內电子的运动方程为

$$m\dot{\mathbf{v}}' = e\mathbf{E}, \tag{99.1}$$

也即是可以把电子看成是自由的（参閱 §59）

从 (99.1) 式，我們求得电子在电磁波場作用下所得到的速度为

$$\mathbf{v}' = \frac{ie}{m\omega}\mathbf{E}.$$

我們用 $n(x, y, z)$ 表示晶体內的电子数密度，它对电子的量子状态和晶格內原子核的热运动的統計分布求平均。但是应着重指出，这里并不包括通常宏观理論中对物理无穷小体积元求平均，也即是 $n(x, y, z)$ 是晶格內“电子云”的眞正量子力学密度。由波場所产生的相应的电流密度为

$$\mathbf{j}' = en\mathbf{v}' = \frac{ie^2 n}{m\omega}\mathbf{E}. \tag{99.2}$$

---

① 原子核上的散射，由于其质量很大，当然是不重要的。

我們把这电流代入到麦克斯韦微观方程內.

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}=i\frac{\omega}{c}\mathbf{H},\tag{99.3}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}=-\frac{i\omega}{c}\mathbf{E}+\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}'=-\frac{i\omega}{c}\left(1-\frac{4\pi e^2n}{m\omega^2}\right)\mathbf{E}.\tag{99.4}$$

同时我們必須考虑到它对場的反作用，也即是散射效应。这时当然假定这种效应很小，也即是下面的不等式正确:

$$\frac{4\pi e^2n}{m\omega^2}\ll 1.\tag{99.5}$$

由引进符号 $\mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E}$, 其中

$$\varepsilon=1-\frac{4\pi e^2n}{m\omega^2},\tag{99.6}$$

$\mathbf{D}$ 相应于通常的感应强度的定义，于是(99.4) 式可以化成通常的形式: $\operatorname{rot}\mathbf{H}=-\left(\frac{i\omega}{c}\right)\mathbf{D}$。在这种意义上，我們看到，介电常数的表达式(99.6)(参照(59.1)式)，当波长 $\lambda\sim a$ 时也可以应用。当然这时必須記住，这里出現的 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{D}$ 的意义不和前面的相同，因为它們現在是对未对物理无限小体积求平均的場而言。因而 ε 現在是坐标的函数。

倫琴射綫在重原子上散射时，可能发生一种情况: 条件 $\omega\gg\omega_0$ 对外电子层滿足，但对內电子不滿足，对內电子 $\omega\lesssim\omega_0$，因而不等式 $\lambda\gg a$ 成立。在这种情况下，也可以引进介电常数的概念(作为 $\mathbf{D}$ 和 $\mathbf{E}$ 間的比例系数)，但是(99.6) 形式的公式这时只能給出外电子的貢献；而內电子的貢献在原則上必須由对这些电子层的体积求平均值而算出。由此可見，若写出普遍形式的式子: $\mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E}$ (其中 ε 为坐标的函数)，則我們就自然地考虑到了各种可能的情况。为明确起見，我們下面即利用(99.6)式。

在(99.2)式內对电子的密度求平均值，結果得到不含时間的 $n(x, y, z)$，于是我們就消除了散射时頻率的可能改变。換句話說，

我們只研究頻率沒有改变的严格的相干散射。

从方程(99.3)和(99.4)內消去 **H**, 我們得到

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{E}=\frac{\omega^2}{c^2}\mathbf{D}.$$

我們在上式內代入

$$\mathbf{E}=\mathbf{D}+\frac{4\pi e^2 n}{m\omega^2}\mathbf{E},$$

幷将 rot rot **E** 展开, 同时考虑到 $\mathrm{div}\,\mathbf{D}=0$[如从(99.4)得出的], 于是我們得到

$$\Delta\mathbf{D}+\frac{\omega^2}{c^2}\mathbf{D}=\mathrm{rot}\;\mathrm{rot}\;\frac{4\pi e^2 n}{m\omega^2}\mathbf{E}. \tag{99.7}$$

因在这方程的右側已包含有小量$\frac{4\pi e^2 n}{m\omega^2}$, 因而必須把 **E** 理解为給定的入射波場。我們来求出(99.7)式在散射晶体外很远处的解①。因为这方程在形式上和(93.3)式相同, 因而按照与(93.4)类似, 我們可以立即写出所求的解为

$$\mathbf{E}=\frac{e^2}{m\omega^2}\,\frac{e^{ikR_0}}{R_0}[\mathbf{k}'[\mathbf{k}'\mathbf{E}_0]]\int n e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}}dV, \tag{99.8}$$

式中 R 为从在晶体內的坐标原点至場观察点的距离; $\mathbf{q}=\mathbf{k}'-\mathbf{k}$; $k=k'=\frac{\omega}{c}$; $\mathbf{E}_0$ 为入射波的振幅; 在等式左側, 我們以 **E** 代替 **D**, 因为在晶体外的真空內, $\mathbf{D}=\mathbf{E}$。

为了表征倫琴射綫衍射强度的特征, 我們引进有效截面 σ, 定义为在立体角 do' 內衍射的輻射强度与入射波內的能通量密度之比。按照(99.8), 我們有

$$d\sigma=\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2\sin^2\theta\left|\int n e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}}\,dV\right|^2 do', \tag{99.9}$$

式中 θ 为 $\mathbf{E}_0$ 与 $\mathbf{k}'$ 間的夹角。若入射光綫为“自然光”(不是偏振

---

①在§93內求解(93.3)式时, 不允許考虑物体外的場, 因为这要求計及物体表面的边界条件, 这是因为(93.3)式左側所包含的量(ε'), 在物体內和物体外不相等。但(99.7)式的左側在全部空間內都不改变其形式。

光)，則上式內的因子 $\sin^2\theta$ 可用 $\frac{1}{2}(1+\cos^2\vartheta)$ 代替，其中 ϑ 为 $\mathbf{k}$ 和 $\mathbf{k}'$ 間的夹角(参閱 415 頁上的底注)，于是

$$d\sigma=\frac{1}{2}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2(1+\cos^2\vartheta)\left|\int ne^{-i\mathbf{qr}}\,dV\right|^2 do'. \quad (99.10)$$

下面为明确起見，我們即假定是这种情况。

我們看到，在給定方向衍射的光綫强度主要由下列积分的模量平方得出：

$$\int ne^{-i\mathbf{qr}}\,dV, \quad (99.11)$$

这也即是电子密度的傅立叶空間分量（$\mathbf{q}$ 取适当的值）。当 $\mathbf{q}\to 0$ 时，这积分简单地变成对晶体体积(也即是对元晶胞)平均的电子密度 $\bar{n}$。但是，若在方程(99.3)和(99.4)內用 $\bar{n}$ 代替 n，則我們就得到通常的麦克斯韦宏观方程，其介电常数为

$$\varepsilon(\omega)=1-\frac{4\pi e^2\bar{n}}{m\omega^2}.$$

按照这些方程，当倫琴射綫通过晶体时，它們按通常的定律发生折射（折射率为 $\sqrt{\varepsilon}$）。由此可見，小角度上的衍射变成我們在这里不感兴趣的通常的折射。下面我們认为 $\mathbf{q}$ 显著地不为零。

电子密度(和晶格內任何位置的函数一样)可以展开为傅立叶級数。

$$n=\sum_{\mathbf{b}} n_{\mathbf{b}}e^{2\pi i\mathbf{br}}, \quad (99.12)$$

式中求和对倒易晶格的全部周期 $\mathbf{b}$ 进行[①]。将 (99.12) 代入 (99.11)式，并对晶体的体积进行积分，只当 $\mathbf{q}$ 接近于某一个 $2\pi\mathbf{b}$ 时，我們才得到显著不为零的結果。在这些值的中間，强度实际上等于零。为此我們可以分别研究每一个衍射的极大值，这时假定 $n=n_{\mathbf{b}}e^{2\pi i\mathbf{br}}$，其中 $\mathbf{b}$ 取給定值。将这式子代入 (99.10) 內，我們

① 参閱"統計物理学"，第三版，§128。

得到

$$d\sigma=\frac{1}{2}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2(1+\cos^2\vartheta)\,|n_{\mathbf{b}}|^2\left|\int e^{-i(\mathbf{k}'-\mathbf{k}-2\pi\mathbf{b})\mathbf{r}}dV\right|^2 do'. \tag{99.13}$$

最强的极大值发生在精确地滿足下列等式的方向上:

$$\mathbf{k}'-\mathbf{k}=2\pi\mathbf{b}, \tag{99.14}$$

这方程称为劳厄方程；这些极大值称为主极大。但是当 $\mathbf{b}$ 为給定时，主极大不可能出現在入射光綫为任意方向和任意頻率时。把(99.14)式写为 $\mathbf{k}'=\mathbf{k}+2\pi\mathbf{b}$，并平方之，再考虑到 $k^2=k'^2$，我們得到

$$\mathbf{bk}=-\pi b^2. \tag{99.15}$$

这个方程决定 $\mathbf{b}$ 为給定値时出現主极大的波矢量 $\mathbf{k}$ 的値。从几何意义上說，(99.15) 式是垂直于矢量 $\mathbf{b}$ 并距离坐标原点为 πb 的 $\mathbf{k}$ 空間內的平面方程。特别是我們看出，必須 $k\geqslant\pi b$。

因为 $|\mathbf{k}'-\mathbf{k}|=2k\sin\frac{\vartheta}{2}$，于是从(99.14)式得出

$$k\sin\frac{\vartheta}{2}=\pi b, \tag{99.16}$$

由它可以求出主极大內的衍射角，这方程称为布拉格-烏耳夫方程。

大家知道，倒易晶格的每一矢量 $\mathbf{b}$ 决定由方程 $\mathbf{rb}=$ 常数所表示的一族晶体平面，其中常数取整数值。这些平面垂直于矢量 $\mathbf{b}$，并且与矢量 $\mathbf{k}$ 和 $\mathbf{k}'$[相应于条件(99.14)]构成相等的入射角和反射角(图 46)。为此主极大內的衍射有时說成从相应晶面上的"反射"。

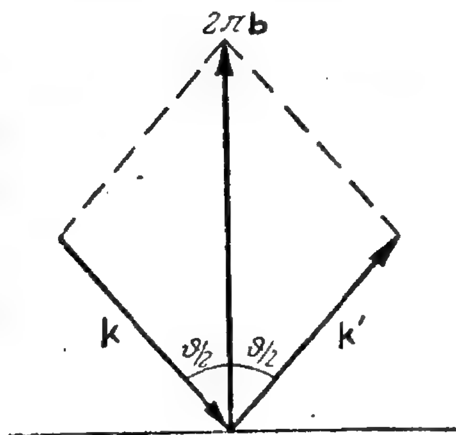


图 46

将(99.13)式对在 $\mathbf{k}'$ 方向附近的

立体角进行积分，我們就得到某一极大附近的衍射“斑”的总强度。我們現在就来求主极大附近的总强度。

我們用 $\mathbf{k}_0'$ 表示相应于精确地满足劳厄条件 $\mathbf{k}_0'=\mathbf{k}+2\pi\mathbf{b}$ 的 $\mathbf{k}'$ 值（$\mathbf{k}$ 为給定值）。我們还引进 $\boldsymbol{\kappa}=\mathbf{k}'-\mathbf{k}_0'$。在极大附近的区域內，$\boldsymbol{\kappa}$ 很小，又因为 $\mathbf{k}'$ 和 $\mathbf{k}_0'$ 只是方向不同，因而 $\boldsymbol{\kappa}\perp\mathbf{k}_0'$。所以立体角元可以写为

$$do'=\frac{1}{k'^2}d\kappa_x d\kappa_y=\frac{1}{k^2}d\kappa_x d\kappa_y, \tag{99.17}$$

这里把 z 軸取在 $\mathbf{k}_0'$ 方向上。由此可見，我們有

$$\sigma=\frac{1}{2k^2}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2(1+\cos^2\vartheta)|n_{\mathbf{b}}|^2\iint d\kappa_x d\kappa_y\left|\int e^{-i\boldsymbol{\kappa}\mathbf{r}}dV\right|^2.$$

在体积分内可以对 dz 进行积分，因为 $e^{-i\boldsymbol{\kappa}\mathbf{r}}$ 与这坐标无关：

$$\int e^{-i\boldsymbol{\kappa}\mathbf{r}}dV=\int Ze^{-i\boldsymbol{\kappa}\mathbf{r}}df,$$

式中 $df=dx\,dy$，而 $Z=Z(x, y)$ 为物体在 $\mathbf{k}_0'$ 方向的长度。最后我們利用傅立叶积分理論的熟知公式：

$$\int(\varphi_\kappa)^2 d\kappa_x\,d\kappa_y=\frac{1}{(2\pi)^2}\int\varphi^2\,dx\,dy, \tag{99.18}$$

式中

$$\varphi_\kappa=\frac{1}{(2\pi)^2}\int\varphi(x, y)e^{-i\boldsymbol{\kappa}\mathbf{r}}dx\,dy$$

为傅立叶二維展开式的分量。于是我們最后得到公式为

$$\sigma=\frac{2\pi^2}{k^2}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2(1+\cos^2\vartheta)\,|n_{\mathbf{b}}|^2\int Z^2df=$$

$$=\frac{2}{b^2}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2\sin^2\frac{\vartheta}{2}(1+\cos^2\vartheta)\,|n_{\mathbf{b}}|^2\int Z^2df. \tag{99.19}$$

这里积分的数量級为 L^4，L 是物体长度的量綱。由此可見，总有效截面（或者衍射斑的总强度）与 $V^{\frac{4}{3}}$ 成比例，其中 V 为物体的体积。我們注意到，极大强度与体积的不同冪成正比：当 $\mathbf{k}'-\mathbf{k}=$

$=2\pi\mathbf{b}$ 时，(99.13)式内的积分簡单地为 V，于是 $d\sigma$ 与 V^2 成正比：

$$\left(\frac{d\sigma}{do'}\right)_{\max}=\frac{1}{2}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2(1+\cos^2\vartheta)|n_{\mathbf{b}}|^2V^2. \qquad (99.20)$$

极大强度比起总强度来与体积 V 的更高次冪成正比，这一事实明显地表示出极大值的銳度。后者的“寬度”显然与 $\frac{V^{\frac{4}{3}}}{V^2}=V^{-\frac{2}{3}}$ 成正比。

上述理論只当衍射效应很小时才能应用。如我們現在見到的，这一要求对晶体的綫度加上一定的条件，即是 σ 必須小于物体截面的几何面积($\sim L^2$)，由此得

$$\frac{e^2}{mc^2}\frac{L}{k}|n_{\mathbf{b}}|\ll 1. \qquad (99.21)$$

例 題

1. 試求在棱长为 L_x, L_y, L_z 的正平行六面形晶体上衍射时主极大周圍衍射斑內的强度分布。

解. 和正文內一样，我們引进矢量 $\kappa=\mathbf{k}'-\mathbf{k}_0'$，选擇坐标軸与平行六面体的棱平行，坐标原点在六面体的中心上。

积分 $\int e^{-i\kappa r}dV$ 可分解为下列形式的三个积分的乘积：

$$\int_{-\frac{L_x}{2}}^{\frac{L_x}{2}} e^{-i\kappa_x x}dx=\frac{2}{\kappa_x}\sin\frac{\kappa_x L_x}{2}.$$

由此可見，

$$d\sigma=32\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2(1+\cos^2\vartheta)|n_{\mathbf{b}}|^2\frac{1}{\kappa_x^2\kappa_y^2\kappa_z^2}\sin^2\frac{\kappa_x L_x}{2}\sin^2\frac{\kappa_y L_y}{2}\sin^2\frac{\kappa_z L_z}{2}do'.$$

应該記住，矢量 κ 的分量不是独立的，而由条件 $\kappa\mathbf{k}_0'=0$ 联系起来。

2. 所求与上題相同，但在半徑为 a 的球形晶体上发生衍射。

解. 我們再引进 $\kappa=\mathbf{k}'-\mathbf{k}_0$，选擇坐标系的 z 軸沿 κ 方向，坐标原点在球心上。我們有

$$\int e^{-i\kappa z}dV=\int_{-a}^{a}\pi(a^2-z^2)e^{-i\kappa z}dz=\frac{4\pi}{\kappa^3}(\sin\kappa a-\kappa a\cos\kappa a).$$

由此可見，

$$d\sigma=8\pi^2\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2(1+\cos^2\theta)|n_{\mathbf{b}}|^2\frac{1}{\kappa^6}(\sin\kappa a-\kappa a\cos\kappa a)^2do'.$$

3. 試求次极大周圍衍射斑的总强度。

解. 在現在的情况下，入射波的波矢量 $\mathbf{k}$ 不滿足条件(99.15)，如在正文內所指出的，(99.15)式是垂直于矢量 $\mathbf{b}$ 的平面方程；我們用 $\eta\mathbf{b}$ 表示矢量 $\mathbf{k}$ 的端点偏离这平面的小位移，此处 $\eta\ll1$。換句話說，我們将 $\mathbf{k}$ 表示为 $\mathbf{k}=\mathbf{k}_0+\eta\mathbf{b}$，式中的 $\mathbf{k}_0$ 滿足(99.15)式(图 47)。

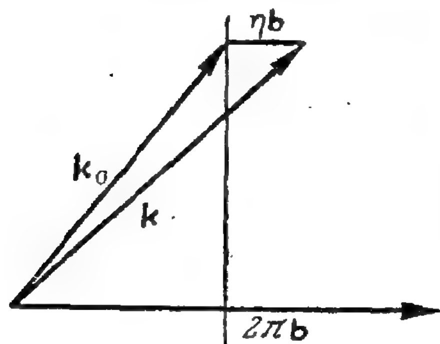


图　47

衍射斑內的极大强度对应于这样的 $\mathbf{k}'$ 方向，这时 $\mathbf{k}'-(\mathbf{k}+2\pi\mathbf{b})$ 为极小值[因而(99.13)內的积分为极大值]。但是两个矢量(其中一个有任意方向)之差的絕对值，当这两个矢量方向重合时有最小值。因此有(考虑到 $k'=k$)

$$|\mathbf{k}'-\mathbf{k}-2\pi\mathbf{b}|_{\min}=k-|k+2\pi\mathbf{b}|=\frac{k^2-(\mathbf{k}+2\pi\mathbf{b})}{k+|\mathbf{k}+2\pi\mathbf{b}|}.$$

因为 $\mathbf{k}$ 接近于 $\mathbf{k}_0$，又因为我們研究极大附近的区域；于是 $\mathbf{k}'\cong\mathbf{k}+2\pi\mathbf{b}$，而且上述式子內的分母可用 $2k$ 来代替。将分子內的括号展开，我們得到

$$-2\mathbf{k}\cdot2\pi\mathbf{b}-(2\pi\mathbf{b})^2=[-2\mathbf{k}_0\cdot2\pi\mathbf{b}-(2\pi\mathbf{b})^2]-$$
$$-2\eta\mathbf{b}\cdot2\pi\mathbf{b}=-4\pi\eta b^2.$$

由此可見，

$$|\mathbf{k}'-\mathbf{k}-2\pi\mathbf{b}|_{\min}\cong-\frac{2\pi\eta b^2}{k}.$$

其次，按照下列引进 κ：

$$\mathbf{k}'=(\mathbf{k}+2\pi\mathbf{b})\left(1-\frac{2\pi\eta b^2}{k^2}\right)+\kappa,$$

选擇 z 軸在 $\mathbf{k}+2\pi\mathbf{b}$ 的方向，于是問題变成計算积分[比照(99.19)式的推导]：

$$\iint d\kappa_x d\kappa_y\left|\int\exp\left\{i\frac{2\pi\eta b^2}{k}z-i\kappa\mathbf{r}\right\}dV\right|^2=$$

$$=\iint d\kappa_x d\kappa_y\left|\int e^{-i\kappa r}\frac{\sin\left(\pi\eta b^2\frac{Z}{k}\right)}{\frac{\pi\eta b^2}{k}}df\right|^2.$$

最后，我們利用(99.18)式，得到

$$\sigma=\frac{2\pi^2}{k^2}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2(1+\cos^2\vartheta)|n_{\mathbf{b}}|^2\int\frac{\sin^2\left(\pi\eta b^2\frac{Z}{k}\right)}{\left(\frac{\pi\eta b^2}{k}\right)^2}df.$$

当 $\eta\to 0$ 时，这式子变成 (99.19) 式。若 $\pi\eta b^2 Z/k\gg 1$ (这不与条件 $\eta\ll 1$ 矛盾)，則正弦的平方可用它的平均值$\frac{1}{2}$来代替，于是我們得到

$$\sigma=\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2\frac{1+\cos^2\vartheta}{\eta^2 b^4}|n_{\mathbf{b}}|^2 S,$$

式中 S 为物体在 x, y 平面上的投影(暗影)面积。

§ 100. 积分强度

前一节导出的公式給出严格的单色平面波入射到晶体上的衍射强度。我們現在来研究不滿足这些条件的一些情况。

首先，我們研究入射波为平面波但非单色波的情况[1]。換句話說，它的譜分解包含波矢量 $\mathbf{k}$ 的方向相同但数值 $k=\omega/c$ 不同的波。我們用 $\rho(k)$表示入射波强度按频率分布的密度，并且由条件 $\int\rho(k)dk=1$ 归一化为 1。

衍射斑的总强度由将(99.13)式对 do' 和对 $\rho(k)dk$ 进行积分而得到的有效截面給出:

$$\sigma=\frac{1}{2}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2|n_{\mathbf{b}}|^2\iint\left|\int e^{-i(\mathbf{k}'-\mathbf{k}-2\pi\mathbf{b})\mathbf{r}}dV\right|^2\times$$
$$\times(1+\cos^2\vartheta)\rho(k)do'dk. \qquad (100.1)$$

我們暂时引进符号 $\mathbf{K}=\mathbf{k}'-\mathbf{k}-2\pi\mathbf{b}$，并将模量的平方写成重积分的形式:

---

[1] 这情况对应于晶体倫琴射綫分析中熟知的劳厄方法。

$$\left|\int e^{-i\mathbf{K}\mathbf{r}}dV\right|^2=\iint e^{i\mathbf{K}(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)}dV_1\,dV_2.$$

代替 $\mathbf{r}_1$ 和 $\mathbf{r}_2$，引进变数 $\frac{1}{2}(\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2)$ 和 $\mathbf{r}=\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1$，并对第一个对物体的体积进行积分，我們得到

$$\left|\int e^{i\mathbf{K}\mathbf{r}}dV\right|^2=V\int e^{i\mathbf{K}\mathbf{r}}dV.$$

在剩下的积分內，現在可以对全部的空間进行积分[①]，結果为

$$\left|\int e^{i\mathbf{K}\mathbf{r}}dV\right|^2=(2\pi)^3V\delta(\mathbf{K}).\qquad(100.2)$$

将这結果代入(100.1)式后，我們可以把后者改写为

$$\sigma=4\pi^3\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2|n_b|^2V(1+\cos^2\vartheta_0)\times$$
$$\times\iint\delta(\mathbf{k}'-\mathbf{k}-2\pi\mathbf{b})\rho(k)do'\,dk;\qquad(100.3)$$

由于被积式內出現 δ 函数，因子 $1+\cos^2\vartheta$ 我們用它在 $\vartheta=\vartheta_0$ 时的值代替后已将它移到积分号外，其中 ϑ_0 为滿足劳厄条件（我們将它們表示为 $\mathbf{k}_0$ 和 $\mathbf{k}_0'=\mathbf{k}_0+2\pi\mathbf{b}$）的矢量 $\mathbf{k}$ 和 $\mathbf{k}'$ 間的夹角。

对 do' 的积分可以方便地进行，因为我們注意到，它等价于对

$$d^3k'=k'^2dk'do'=\frac{1}{2}k'd(k'^2)do'$$

的积分，只要在被积式內引入附加因子 $\left(\frac{2}{k}\right)\delta(k'^2-k^2)$。由此可見，(100.3)內的积分可以用下面的积分来代替：

$$\iint\frac{2}{k}\delta(\mathbf{k}'-\mathbf{k}-2\pi\mathbf{b})\delta(k'^2-k^2)\rho(k)d^3k'\,dk.$$

利用第一个 δ 函数对 d^3k' 进行积分时我們必須在第二个 δ 函数內用 $(\mathbf{k}+2\pi\mathbf{b})^2$ 代替 k'^2，結果得到

$$\int\frac{2}{k}\delta(4\pi^2b^2+4\pi\mathbf{b}\mathbf{k})\rho(k)dk=$$

---

① 因为我們的目的是計算衍射斑的总强度而不是它的寬度，因而可以这样作。

$$= \int \frac{1}{2\pi k} \delta(\mathbf{bk} + \pi b^2) \rho(k) dk,$$

于是

$$\sigma = 2\pi^2 \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 |n_{\mathbf{b}}|^2 V(1 + \cos^2\vartheta_0) \int \frac{1}{k} \delta(\mathbf{bk} + \pi b^2) \rho(k) dk. \tag{100.4}$$

最后，我們对 dk 进行积分（方向 $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{k}}{k}$ 給定）。当 $k = k_0$ 时，δ 函数的宗量变为零，于是积分等于

$$\frac{\rho(k_0)}{k_0} \frac{1}{(\mathbf{bn})} = \frac{\rho(k_0)}{|\mathbf{bk}_0|} = \frac{\rho(k_0)}{\pi b^2}.$$

这样一来，我們最后得到

$$\sigma = 2\pi \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 |n_{\mathbf{b}}|^2 V(1 + \cos^2\vartheta_0) \frac{\rho(k_0)}{b^2}. \tag{100.5}$$

我們現在研究另一种情况，即入射波为单色波，但包含 $\mathbf{k}$ 方向不相同的各分量，$\mathbf{k}$ 方向的不同系由繞某一軸相互轉动而产生[①]。在这軸上的单位矢量我們用 $\mathbf{l}$ 表示，而繞它的轉动角用 ψ 表示。設函数 $\rho(\psi)$ 給出入射輻射强度的角分布，并已归一化为 1:

$$\int_0^{2\pi} \rho(\psi) d\psi = 1.$$

导至(100.4)的全部計算也完全适用于这种情况，唯一的差别是对 $\rho(k)dk$ 的积分必須用对 $\rho(\psi)d\psi$ 的积分来代替:

$$\sigma = 2\pi^2 \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 |n_{\mathbf{b}}|^2 V(1 + \cos^2\vartheta_0) \int \frac{1}{k} \delta(\mathbf{bk} + \pi b^2) \times$$
$$\times \rho(\psi) d\psi. \tag{100.6}$$

我們仍然用 $\mathbf{k}_0$ 表示 δ 函数的宗量变为零时的 $\mathbf{k}$ 值，并从 $\mathbf{l}$, $\mathbf{k}_0$ 平面起計算 ψ。当 ψ 小时我們有

---

① 这种情况相当于倫琴結构分析中熟知的布拉格方法（或旋轉方法）；而且实际上所指的并不是 $\mathbf{k}$ 方向的轉动，而是指晶体本身繞 $\mathbf{l}$ 軸的轉动。

$$\mathbf{k}=\mathbf{k}_0+[\mathbf{l}\mathbf{k}_0]\psi.$$

于是(100.6)式內的积分变为

$$\int\frac{1}{k}\delta(\mathbf{b}[\mathbf{l}\mathbf{k}_0]\psi)\rho(\psi)d\psi=\frac{\rho(0)}{k|\mathbf{b}[\mathbf{l}\mathbf{k}_0]|}=$$

$$=\frac{\rho(0)}{k^2|\mathbf{b}[\mathbf{l}\mathbf{n}_0]|}=\frac{\rho(0)\sin^2\frac{\vartheta_0}{2}}{\pi^2b^2|\mathbf{b}[\mathbf{l}\mathbf{n}_0]|}.$$

由此可見，

$$\sigma=\frac{2}{b^2}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2\sin^2\frac{\vartheta_0}{2}(1+\cos^2\vartheta_0)|n_b|^2V\frac{\rho(0)}{|\mathbf{b}[\mathbf{l}\mathbf{n}_0]|}. \quad (100.7)$$

最后，我們来研究单色平面波从晶粒无序取向的物体上的衍射現象①。

我們用 $\mathbf{k}_0'$ 和 $\mathbf{b}_0$ 表示矢量 $\mathbf{k}'$ 和 $\mathbf{b}$,其取向使劳厄条件 $\mathbf{k}_0'=\mathbf{k}+$ $+2\pi\mathbf{b}_0$ 滿足。$\mathbf{k}_0'$ 和 $\mathbf{b}_0$ 的方向不是唯一确定的，因为当三角形 $\mathbf{k}$, $2\pi\mathbf{b}_0$, $\mathbf{k}_0'$ 繞 $\mathbf{k}$ 方向轉动时，劳厄条件当然仍然是滿足的。由此可見,主极大相当于 $\mathbf{k}'$ 的方向，这方向占据一个頂角为 $2\vartheta_0$ 的錐面。于是代替衍射“斑”,我們現在得到一个衍射“环”。

所求的总有效截面由与(100.4)相同的公式給出,所不同的只是其中对 $\rho(k)dk$ 的积分必須用对 $\mathbf{b}$ 的所有方向的平均来代替:

$$\sigma=2\pi^2V\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2|n_{\mathbf{b}}|^2(1+\cos^2\vartheta_0)\int\frac{1}{k}\delta(\mathbf{b}\mathbf{k}+\pi b^2)\ \frac{do_{\mathbf{b}}}{4\pi}, \quad (100.8)$$

$do_{\mathbf{b}}$ 为在 $\mathbf{b}$ 方向的立体角元。我們用 α 表示 $\mathbf{k}$ 和 $\mathbf{b}$ 間的夹角，可以将(100.8)內的积分写为

$$\int\frac{1}{k}\delta(bk\cos\alpha+\pi b^2)\frac{2\pi b\cos\alpha}{4}=\frac{1}{2bk^2}=\frac{1}{2b^3\pi^2}\sin^2\frac{\vartheta_0}{2}.$$

由此可見，

① 这种情况相当于倫琴射綫結构分析中的粉末方法(德拜-歇尔方法)

$$\sigma=\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2|n_{\mathbf{b}}|^2\frac{V}{b^3}(1+\cos^2\vartheta_0)\sin^2\frac{\vartheta_0}{2}. \quad (100.9)$$

在上述三种情况中，每一种情况对应于对衍射图样求平均的一种特殊方法。我們注意到，正如所預料的，总平均衍射强度与物体体积的关系，这时归結为简单的比例关系。我們記住，在未平均的图样內，衍射强度以及它在衍射斑上的分布更尖銳地依賴于物体的体积。

§ 101. 倫琴射綫的扩散式热散射

在上面两节內，我們曾把 $n(x, y, z)$ 理解为晶体內对时間平均的电子密度。因此从其中排除了由不同原因所引起的密度起伏以及倫琴射綫散射的相应部分(非相干部分)。非相干散射的来源之一是密度的热起伏。这种散射"扩散式"地分布于所有方向，但它的主要特征是：在前节所研究的"結构"散射的銳綫方向附近有比較大的强度。我們現在就来研究热散射的这些极大值 (W. H. Zacharisen, 1940)。

晶格的热振动可以設想为被分解成許多单个的"声"波。如从下面所看到的，我們感兴趣的热散射的极大值是由波长大于晶格常数的波所产生的。在空間的每一点处，由这种波所引起的电子密度的改变，可以看成是晶格簡单地移动了一个距离等于波的位移矢量 $\mathbf{u}$ 的局部值的結果。由此可見，当給定的声波通过时，密度的改变(未对时間平均!)可以用平均密度来表示为

$$\delta n=n(\mathbf{r}-\mathbf{u})-n(\mathbf{r})\cong-\mathbf{u}\frac{\partial n}{\partial \mathbf{r}}.$$

研究給定綫附近的扩散式散射时，我們必須用 $n_{\mathbf{b}}e^{2\pi i\mathbf{br}}$ 代替 n，其中 $\mathbf{b}$ 为給定的，于是

$$\delta n=-2\pi i(\mathbf{bu})n_{\mathbf{b}}e^{2\pi i\mathbf{br}}. \quad (101.1)$$

密度起伏所引起的散射与平均密度所引起的散射当然是非相干的，因此它們不发生干涉現象。所以，扩散式散射的有效截面可以从(99.10)式求出，只要在其中用 δn 代替 n，然后对起伏求統計平均：

$$d\sigma=2\pi\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2|n_{\mathbf{b}}|^2(1+\cos^2\vartheta)\overline{\left|\int(\mathbf{ub})e^{-i\mathbf{Kr}}dV\right|}do',\tag{101.2}$$

式中引进了符号 $\mathbf{K}=\mathbf{k}'-\mathbf{k}-2\pi\mathbf{b}$。在矢量 $\mathbf{K}$ 为小值($K\ll 2\pi b$)的方向上，散射的强度大。

积分 $\int\mathbf{u}e^{-i\mathbf{Kr}}dV$ 給出 $\mathbf{u}$ 的傅立叶空間分量，其波矢量为 $\mathbf{K}$；因此我們可以把 $\mathbf{u}$ 簡单地理解为在波矢量为 $\mathbf{K}$ 的声波內的位移矢量。于是不等式 $K\ll 2\pi b$ 表明，散射声波的波长大于元晶胞的綫度。

这样一来，我們可以令

$$\mathbf{u}=\frac{1}{2}(\mathbf{u}_0e^{i\mathbf{Kr}}+\mathbf{u}_0^*e^{-i\mathbf{Kr}}),\tag{101.3}$$

于是

$$\int(\mathbf{bu})e^{-i\mathbf{Kr}}dV=\frac{1}{2}V(\mathbf{bu}_0),$$

有效截面为

$$d\sigma=\frac{\pi^2}{2}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2|n_{\mathbf{b}}|^2(1+\cos^2\vartheta)b_ib_k\overline{u_{0i}u_{0k}}V^2do'.\tag{101.4}$$

对 $\mathbf{u}_0$ 的分量的乘积求平均，和 § 98 內对各向同性物体內的声波所进行的相似。形变晶体单位体积的彈性能为

$$\frac{1}{2}\lambda_{iklm}u_{ik}u_{lm},$$

式中 u_{ik} 为形变張量，而 λ_{iklm} 为彈性模量張量[①]。因此，整个晶体

① 参閱"連續介质力学"第二版，第二部分，§ 10。

的平均彈性能等于

$$\frac{1}{2}V\lambda_{iklm}\overline{u_{ik}u_{lm}}.$$

我們在上式內代入

$$u_{ik}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}+\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\{(iK_k u_{0i}+iK_i u_{0k})e^{i\mathbf{Kr}}\}.$$

含有因子 $e^{\pm 2i\mathbf{Kr}}$ 的項平均时变为零。还考慮到張量 λ_{iklm} 的对称性质(对下角标 i, k 和 l, m 以及对 i, k 与 l, m 的交換都对称)，我們得到

$$\frac{V}{4}\lambda_{iklm}K_k K_m\overline{u_{0i}u_{0l}^*},$$

或者

$$\frac{V}{4}g_{ik}\overline{u_{0i}u_{0k}^*},$$

式中引进了符号:

$$g_{ik}=\lambda_{ilkm}K_l K_m. \tag{101.5}$$

按照热力学起伏的普遍理論，我們現在可以立即写出所求的平均值①为

$$\overline{u_{0i}u_{0k}^*}=\frac{4T}{V}g_{ik}^{-1}, \tag{101.6}$$

式中 g_{ik}^{-1} 为 g_{ik} 的逆張量，而有效散射截面为

$$d\sigma=2\pi^2\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 TV|n_{\mathbf{b}}|^2(1+\cos^2\vartheta)b_i b_k g_{ik}^{-1}\cdot do'. \tag{101.7}$$

由此可見，如所預料的，扩散式散射强度与晶体的体积成正比。这种散射的特征是它的强度分布于衍射斑的面积上。我們不考慮因子$(1+\cos^2\vartheta)$，因它对衍射斑实际上为常数，于是我們看到强

① 參閱"統計物理学"第三版 § 109。若起伏量 $x_1, x_2\cdots$ 的几率分布的形式为

$$\exp\left\{-\frac{1}{2}\lambda_{ik}x_i x_k\right\},$$

则 $\overline{x_i x_k}=\lambda_{ik}^{-1}$。(101.6)式出現多余的因子 2 是因为每一复数 u_{0i} 包含两个独立的量，

度的分布由表达式 $g^{-1}_{ik}b_i b_k$ 給出。这个表达式代表 K^{-2} 乘上矢量 **K** 的方向相对于晶軸的一个相当复杂的函数。当在主极大附近散射时，扩散式散射强度在 **K**=0 的点处也是极大[(101.7)式本身当 **K**=0 时变为无穷大，这时当然变成不能应用]。如果条件(99.15) $\mathbf{bk}=-\pi b^2$ 不滿足，則等式 **K**=0 不存在，于是扩散式散射强度的极大值位于某一不为零的 **K** 上，一般說来，它不和結构散射的极大位置相合。在两种情况下，扩散式散射所形成的本底强度基本上随 $\frac{1}{K^2}$ 而下降，也即是比叠加在它上面的結构散射銳綫的强度的下降要慢得多。

附录 曲綫坐标系

下面为参考起見，我們列出了一般的和某些特殊情况下的有关曲綫坐标內矢量运算的一些公式。

在任意的正交曲綫坐标系 u_1, u_2, u_3 內，长度元的平方形式为

$$dl^2 = h_1^2\,du_1^2 + h_2^2\,du_2^2 + h_3^2\,du_3^2,$$

式中 h_i 为坐标的函数，在这种坐标系內的体积元为

$$dV = h_1 h_2 h_3\,du_1\,du_2\,du_3.$$

各种矢量运算用 h_i 函数表示如下。对标量的矢量运算为

$$(\mathrm{grad}\,f)_i = \frac{1}{h_i}\frac{\partial f}{\partial u_i},$$

$$\Delta f = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\sum\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{h_2 h_3}{h_1}\frac{\partial f}{\partial u_1}\right),$$

式中Σ对循环交换下角标 1、2、3 进行求和。对矢量的矢量运算为

$$\mathrm{div}\,\mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\sum\frac{\partial}{\partial u_1}(h_2 h_3 A_1)$$

$$(\mathrm{rot}\,\mathbf{A})_1 = \frac{1}{h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_2}(h_3 A_3) - \frac{\partial}{\partial u_3}(h_2 A_2)\right],$$

rot **A** 的其余分量可由循环交换下角标得到。

柱坐标系 r、φ、z。长度元为

$$dl^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2,\quad h_r = 1, h_\varphi = r, h_z = 1.$$

矢量运算为

$$\Delta f = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2},$$

$$\mathrm{div}\,\mathbf{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z},$$